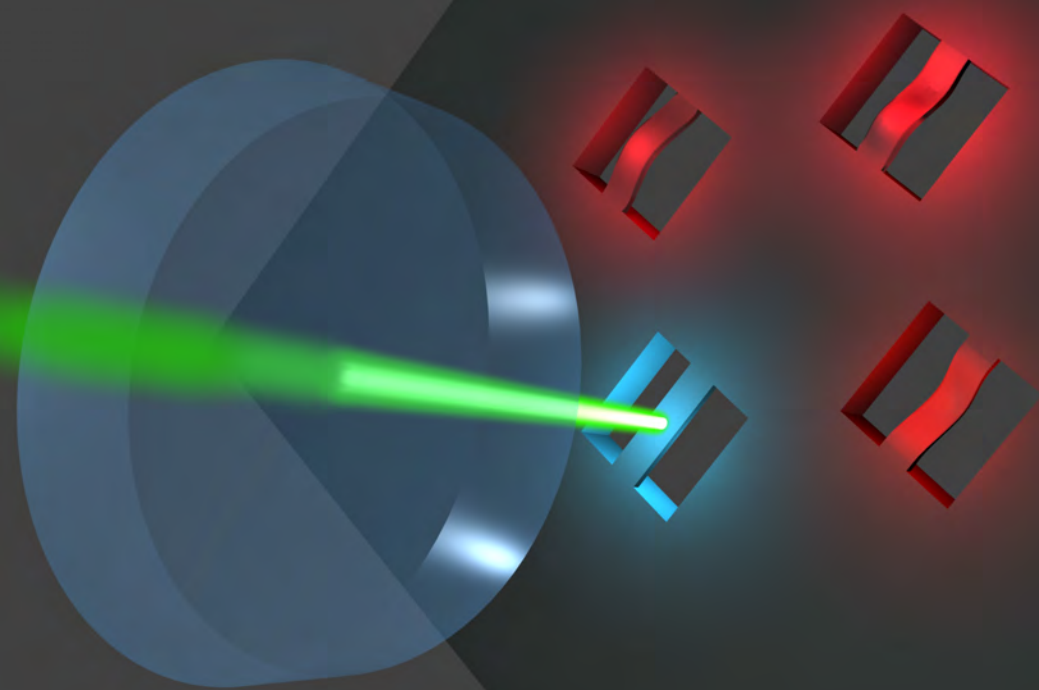


*Remettre un peu de mécanique
dans la mécanique quantique :
refroidissement et contrôle
de l'état quantique
de résonateurs macroscopiques*



*Avec A. Heidmann, S. Deléglise
et T. Briant (et bcp d'autres)*

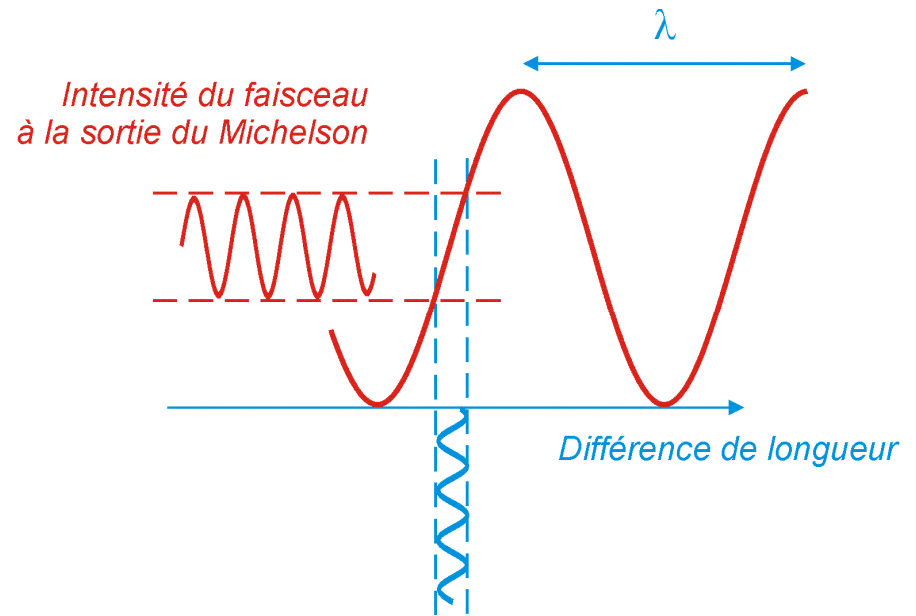
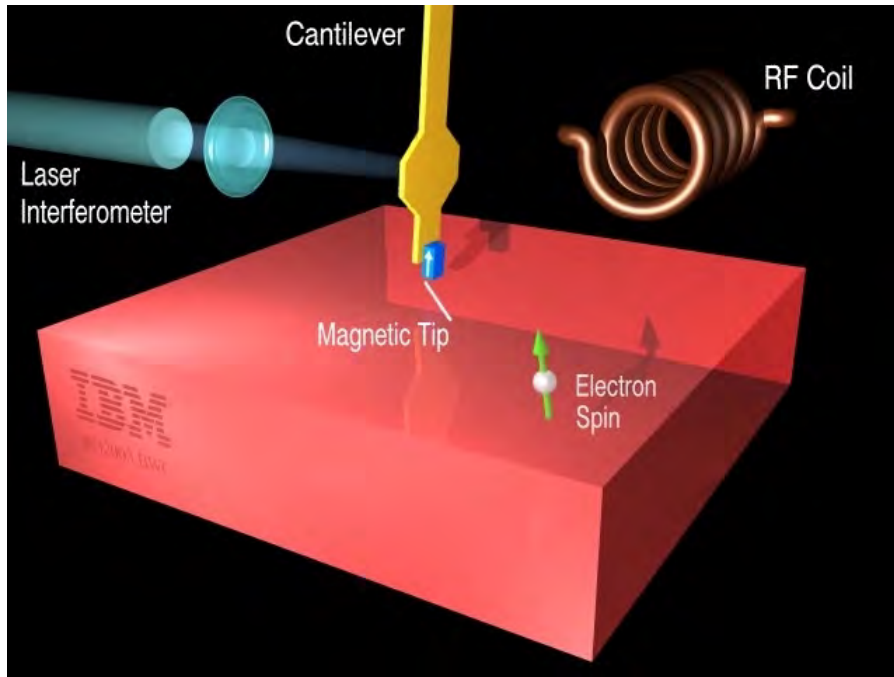
Pierre-François Cohadon



Laboratoire Kastler Brossel
Physique quantique et applications



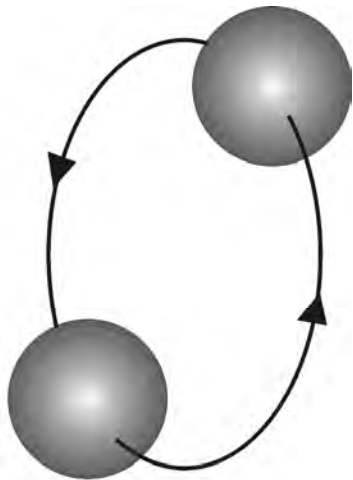
Le début (et la fin ?) de l'histoire : l'interférométrie en microscopie à force atomique



Sensibilité meilleure que l'Angstrom sur le déplacement,
meilleure que l'attonewton sur la force détectée
(1 aN = 10^{-18} N)

(figure par Daniel Rugar, IBM San Jose)

Les ondes gravitationnelles : théorie élémentaire



systeme binaire
(≈ 1 Hz à 1 kHz)

$$\Phi_R(\mathbf{M}, t) = -G \int \rho \left(\mathbf{P}, t - \frac{PM}{c} \right) \frac{1}{PM} d^3\mathbf{P}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{M}, t) = -G \int \left(\frac{\rho}{PM} - \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \frac{\mathbf{P}\mathbf{M}}{PM^3} d^3\mathbf{P}$$

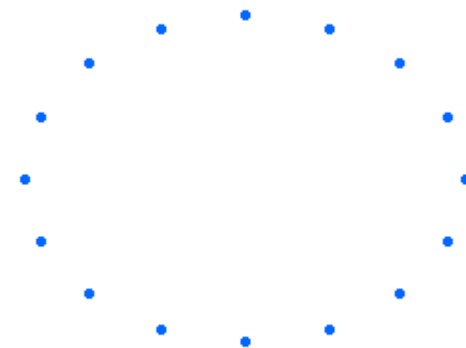
Terme statique

Onde gravitationnelle !!

($\lambda \approx 1000$ km)



$$h = \Delta L/L$$



Un sujet controversé (pour Einstein lui-même)

154 Gesamtsitzung vom 14. Februar 1918. — Mitteilung vom 31. Januar

Über Gravitationswellen.

VON A. EINSTEIN.

(Vorgelegt am 31. Januar 1918 [s. oben S. 79].)

Die wichtige Frage, wie die Ausbreitung der Gravitationsfelder erfolgt, ist schon vor anderthalb Jahren in einer Akademiearbeit von mir behandelt worden¹. Da aber meine damalige Darstellung des Gegenstandes nicht genügend durchsichtig und außerdem durch einen bedauerlichen Rechenfehler verunstaltet ist, muß ich hier nochmals auf die Angelegenheit zurückkommen.

Wie damals beschränke ich mich auch hier auf den Fall, daß das betrachtete zeiträumliche Kontinuum sich von einem »galileischen« nur sehr wenig unterscheidet. Um für alle Indizes

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \quad (1)$$

setzen zu können, wählen wir, wie es in der speziellen Relativitätstheorie üblich ist, die Zeitvariable x_4 rein imaginär, indem wir

$$x_4 = it$$

setzen, wobei t die »Lichtzeit« bedeutet. In (1) ist $\delta_{\mu\nu} = 1$ bzw. $\delta_{\mu\nu} = 0$, je nachdem $\mu = \nu$ oder $\mu \neq \nu$ ist. Die $\gamma_{\mu\nu}$ sind gegen 1 kleine Größen, welche die Abweichung des Kontinuums vom feldfreien darstellen; sie bilden einen Tensor vom zweiten Range gegenüber LORENTZ-Transformationen.

§ 1. Lösung der Näherungsgleichungen des Gravitationsfeldes durch retardierte Potentiale.

Wir gehen aus von den für ein beliebiges Koordinatensystem gültigen² Feldgleichungen

$$-\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ \mu_{\nu} \right\}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ \mu_{\alpha} \right\}_{\nu} + \sum_{\alpha\beta} \left\{ \mu_{\alpha} \right\} \left\{ \nu_{\beta} \right\}_{\alpha} - \sum_{\alpha\beta} \left\{ \mu_{\nu} \right\}_{\alpha} \left\{ \alpha_{\beta} \right\} = -\kappa \left(T_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\nu} T \right) \quad (2)$$

¹ Diese Sitzungsber. 1916, S. 688 ff.

² Von der Einführung des »Güldes« (vgl. diese Sitzungsber. 1917, S. 142) ist dabei Abstand genommen.

Ondes gravitationnelles mentionnées dès 1916

Article fondateur en 1918

Revirement :

... *I arrived at the interesting result that gravitational waves do not exist, though they had been assumed a certainty to the first approximation.*

(lettre à Born, 1936)

Soumet en 1936 un article

» **Do gravitational waves exist?** »

Article finalement publié

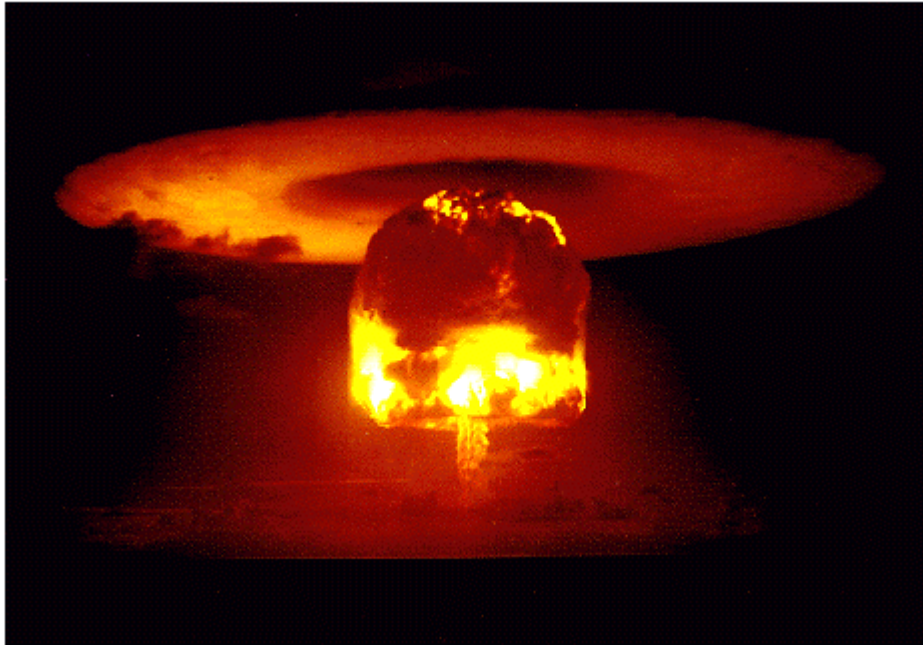
(dans une autre revue) début 1937 :

... *After encountering relationships which cast doubt on the existence of rigorous solutions for undulatory gravitational fields... It turns out that rigorous solutions exist...*

Qqs ordres de grandeur

Barreau d'acier, 500 t, $\phi = 2\text{ m}$,
 $L = 20\text{ m}$, 5 Hz :

$$\Delta L/L \simeq 10^{-34} \text{ à } 1\text{ m}$$



USS Enterprise

Bombe H (1 mégatonne) :

$$\Delta L/L \simeq 10^{-39} \text{ à } 1\text{ km}$$

Castle Romeo test, 26 Mars 1964

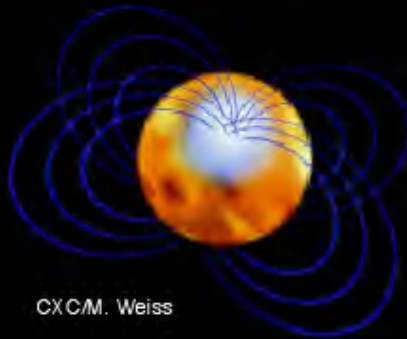
Sources astrophysiques



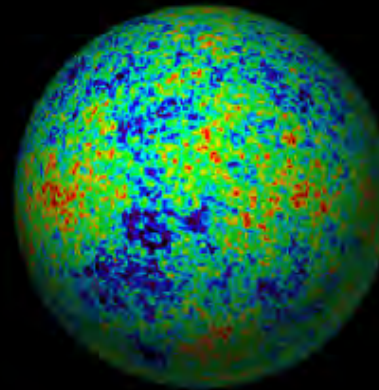
“Short bursts:”
Supernovae,
transient sources,
???



**Compact Binary
Coalescence
(CBC):** “long bursts”
of gravitational
waves
as stars inspiral,
merge and ring down



**Continuous
sources:**
Spinning
neutron stars

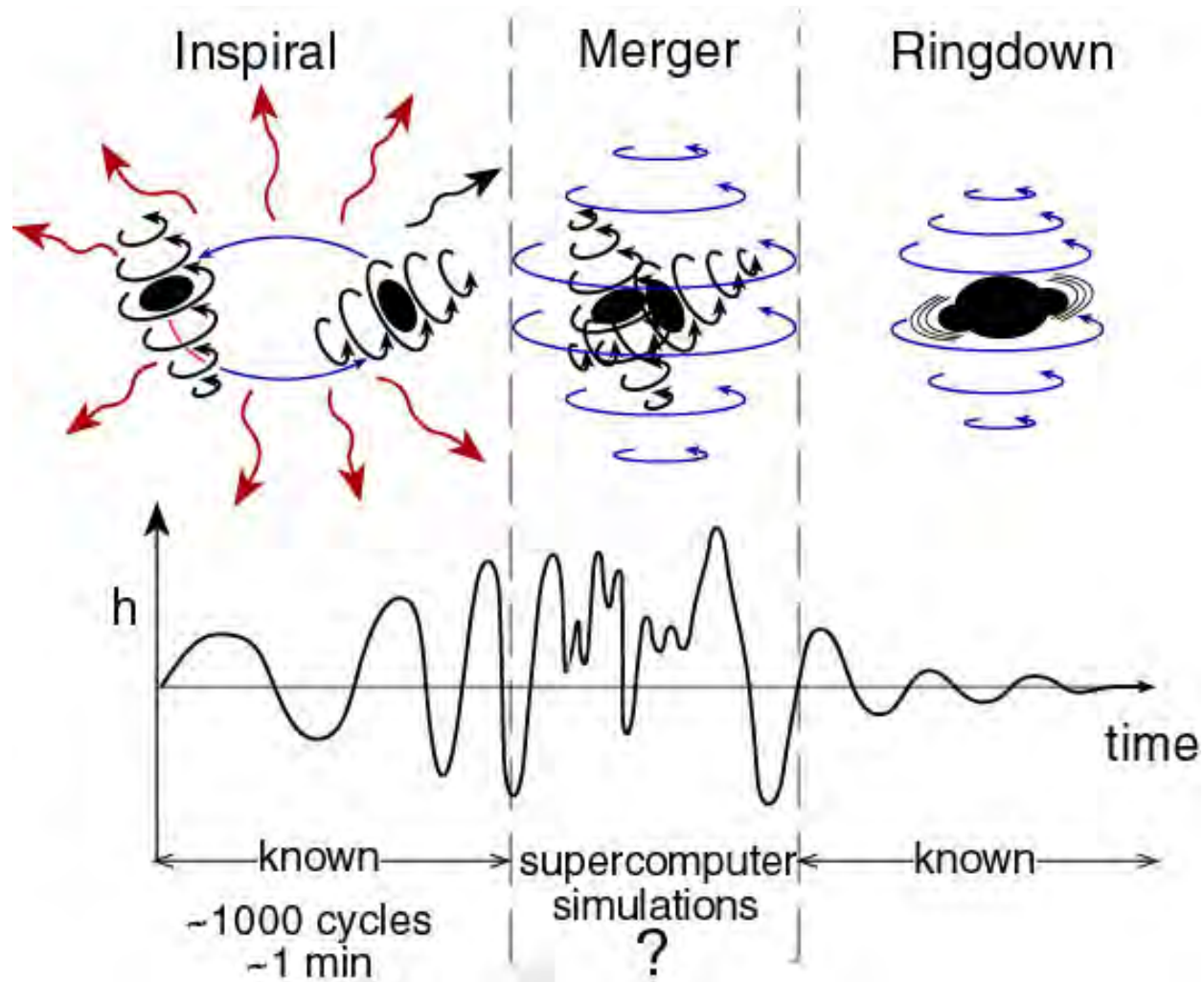


**Gravitational
wave
backgrounds:**
relic radiation
from the big
bang

Coalescence de 2 trous noirs ($1 M_{\odot}$):

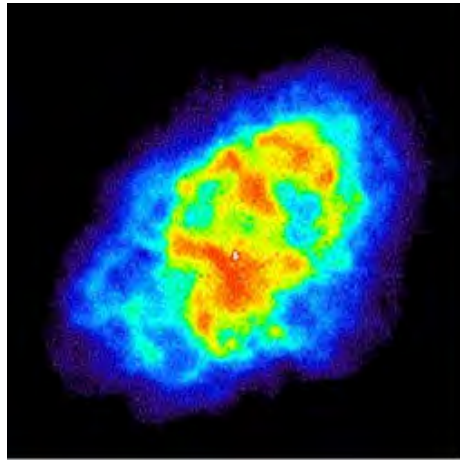
$$\Delta L/L \simeq 10^{-20} \text{ à } 10 \text{ Mpc}$$

A quoi peut servir une détection directe ?



(figure par Kip Thorne, Caltech)

Une nouvelle fenêtre sur l'univers



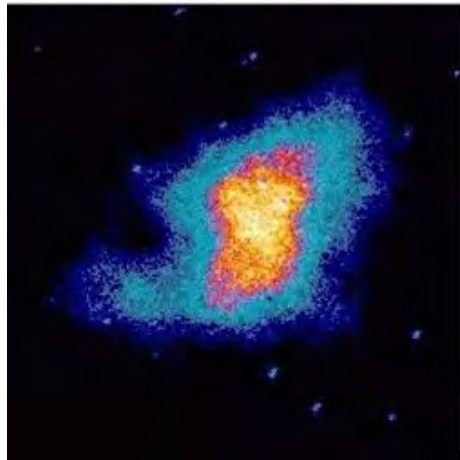
Ondes radio (VLA)



Infrarouge (Spitzer)



Visible (Hubble)



UV (Astro-1)



Rayons X (Chandra)

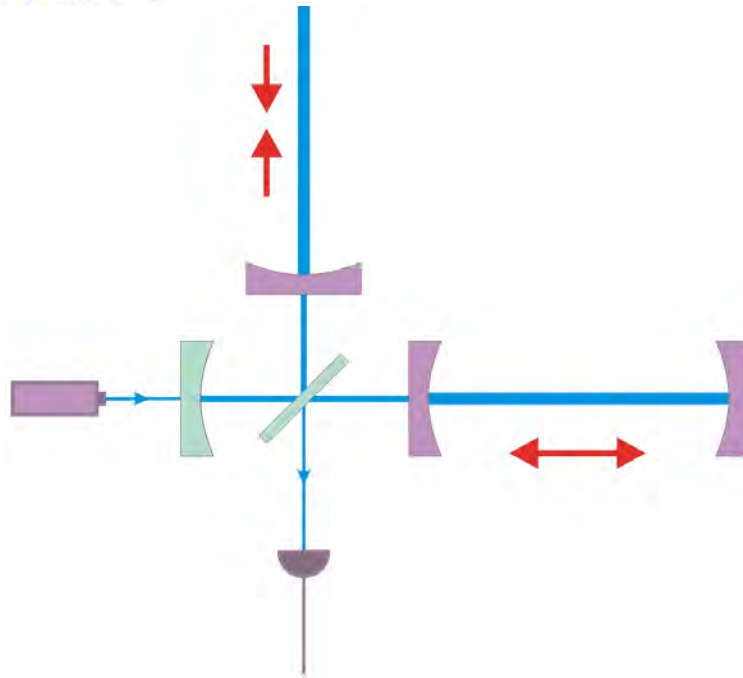


Rayons X (HEFT)

Images de la Nébuleuse du Crabe (Wikipedia)

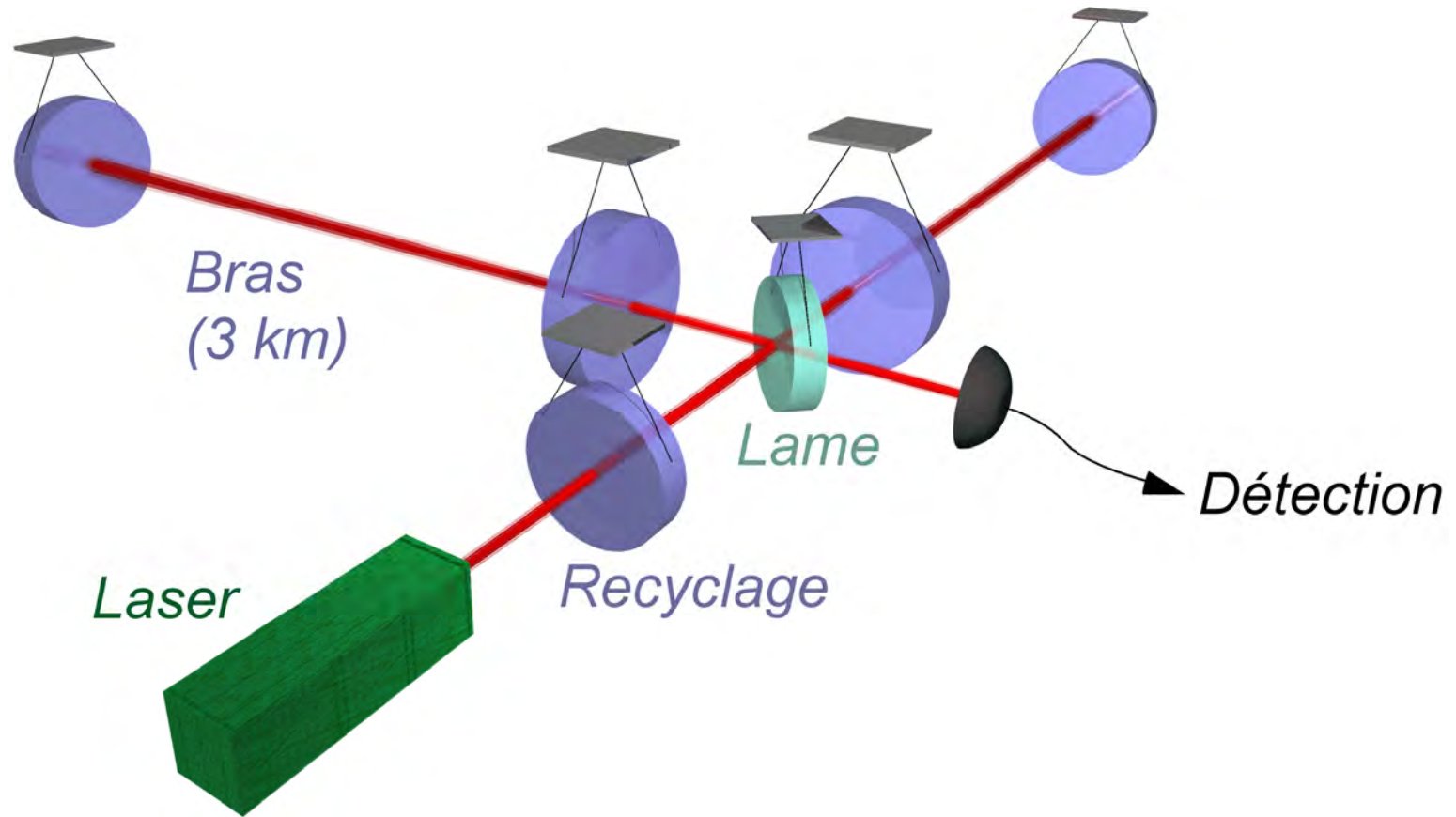
Principe de la détection interférométrique

Effet d'une onde gravitationnelle sur des particules-test :



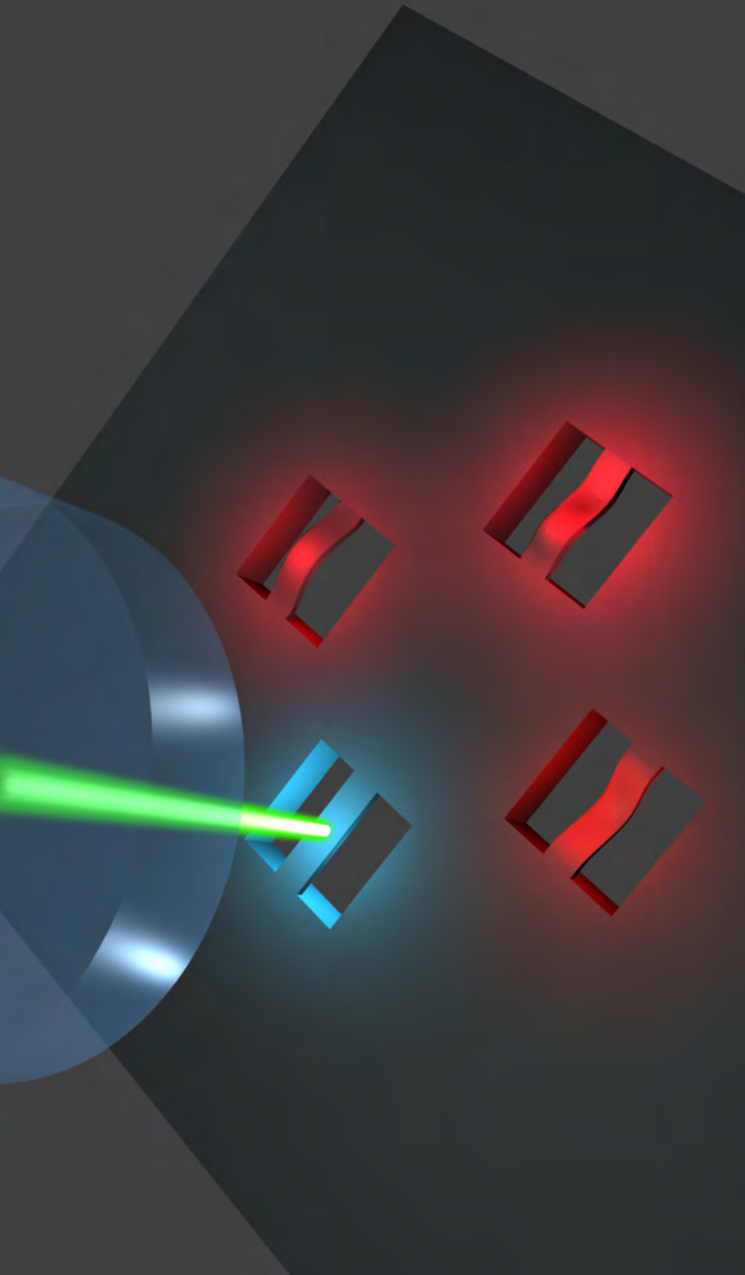
La modification des interférences permet de détecter l'onde

Les interféromètres gravitationnels



$$h_{\min} \simeq 10^{-22}$$

Sensibilité sur une large gamme de fréquences
(de 10 Hz à 10 kHz)



Pourquoi étudier les fluctuations
quantiques de la lumière ?

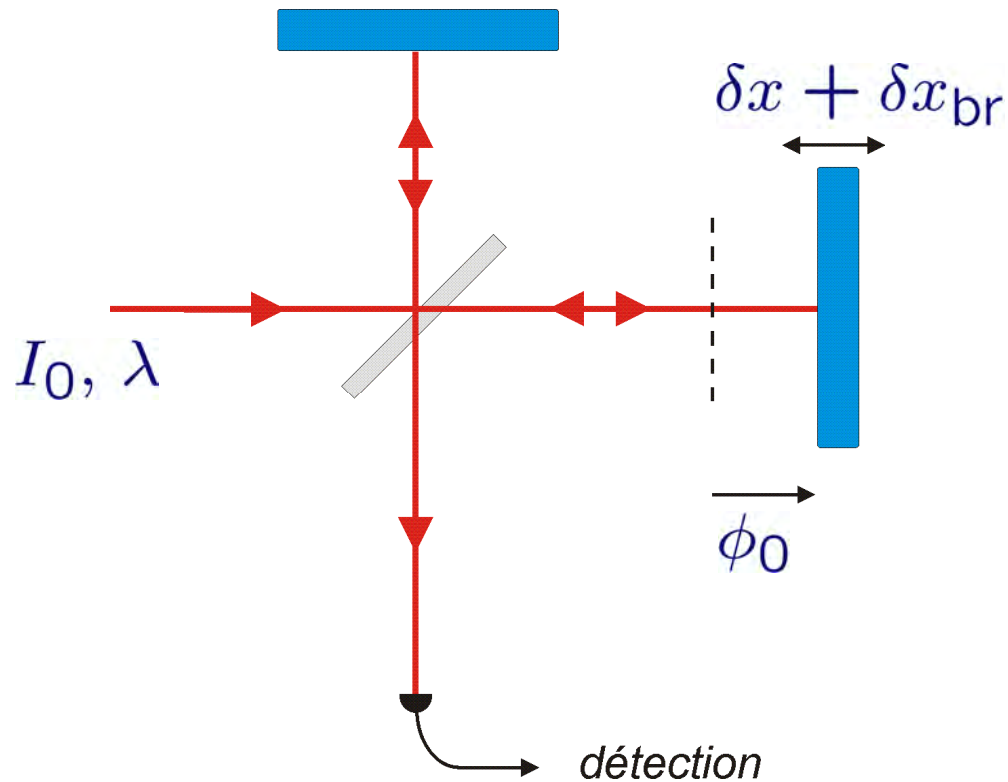
Les limites quantiques dans les mesure de position

Réaliser une cavité avec un miroir mobile

Voir le bruit quantique de pression
de radiation

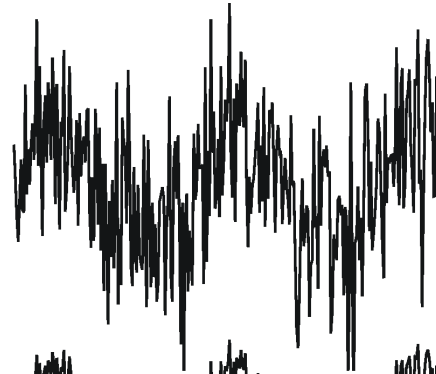
Limites de la sensibilité

$$I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \left(\phi_0 + \frac{4\pi n}{\lambda} (\delta x + \delta x_{br}) \right) \right)$$

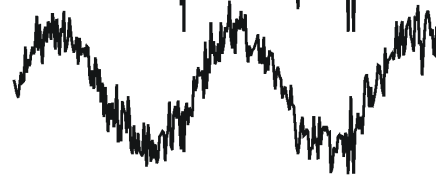


Sensibilité d'une mesure : aspect temporel

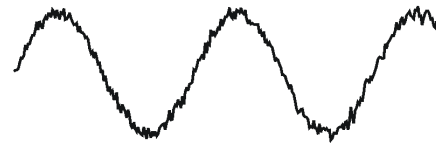
1 acquisition



16 acquisitions



256 acquisitions



Bruit : marche aléatoire en \sqrt{N}
→ effet moyenné en $1/\sqrt{N}$

Sensibilité d'une mesure : aspect fréquentiel

Grandeur aléatoire stationnaire :

$$\langle x(t) \rangle = 0$$

$$C_x(\tau) = \langle x(t + \tau)x(t) \rangle$$

Spectre de bruit :

$$S_x[\Omega] = \int d\tau C_x(\tau) e^{i\Omega\tau}$$

$$\Delta x^2 = C_x(\tau = 0) = \int \frac{d\Omega}{2\pi} S_x[\Omega]$$

Bruit auquel est sensible la mesure :

$$x_{\text{eff}}[\Omega] = F(\Omega)x[\Omega] \Rightarrow S_{\text{eff}} = |F(\Omega)|^2 S_x[\Omega]$$

$$\Delta x_{\text{eff}}^2 = \int \frac{d\Omega}{2\pi} |F(\Omega)|^2 S_x[\Omega]$$

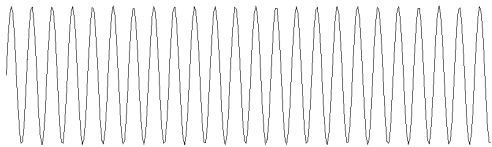
*fonction de transfert
du filtre*

$$\Delta x_{\text{eff}}^2 \propto \Delta f$$

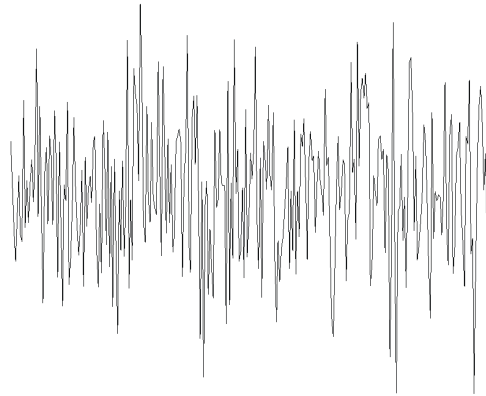
→ sensibilité intrinsèque en $m/\sqrt{\text{Hz}}$

Sensibilité d'une mesure : séparation fréquentielle

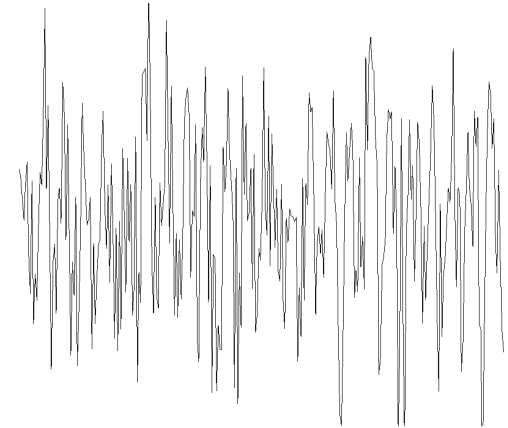
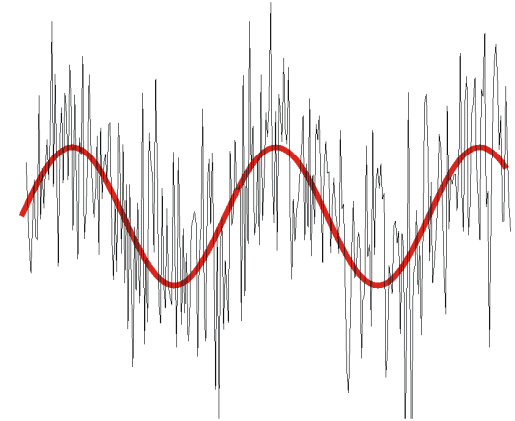
Signal



Bruit



Signal + bruit



Exemple : le spectre de bruit thermique

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega] F_T[\Omega]$$

$$\Rightarrow S_x[\Omega] = |\chi[\Omega]|^2 S_T[\Omega]$$

$$\text{avec } \chi[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega^2 - \Omega_0^2 - i\Omega\Omega_0/Q)}$$

Théorème fluctuations-dissipation :

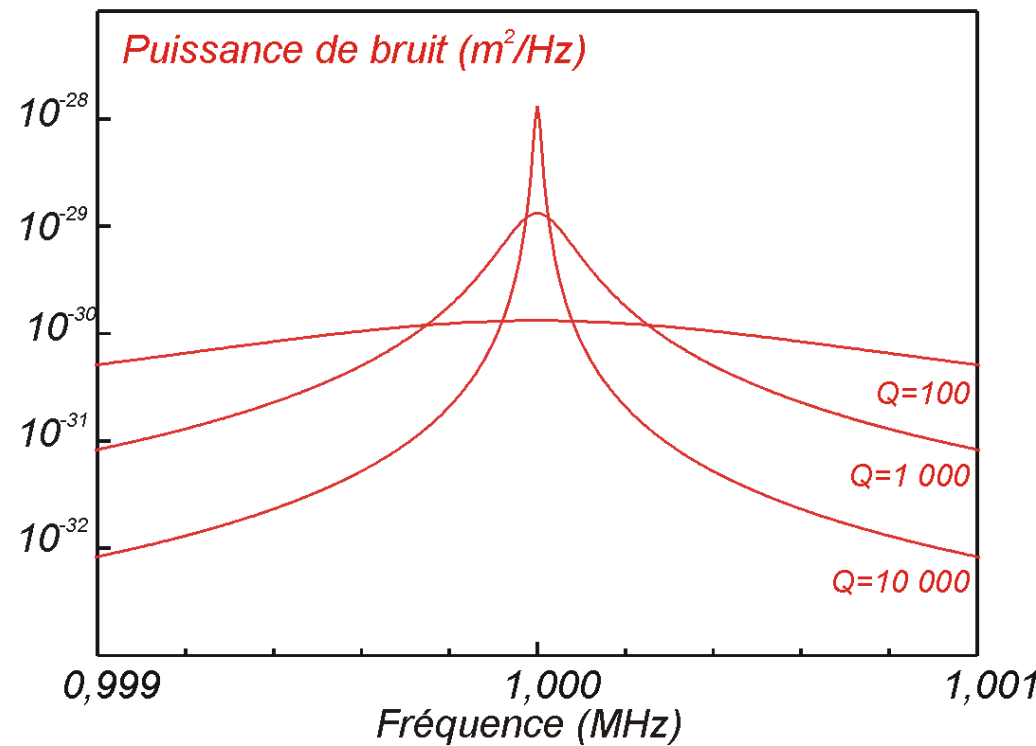
$$S_T[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \text{Im}(1/\chi)$$

Oscillateur mécanique :

$$\Omega_0/2\pi \simeq 1 \text{ MHz}$$

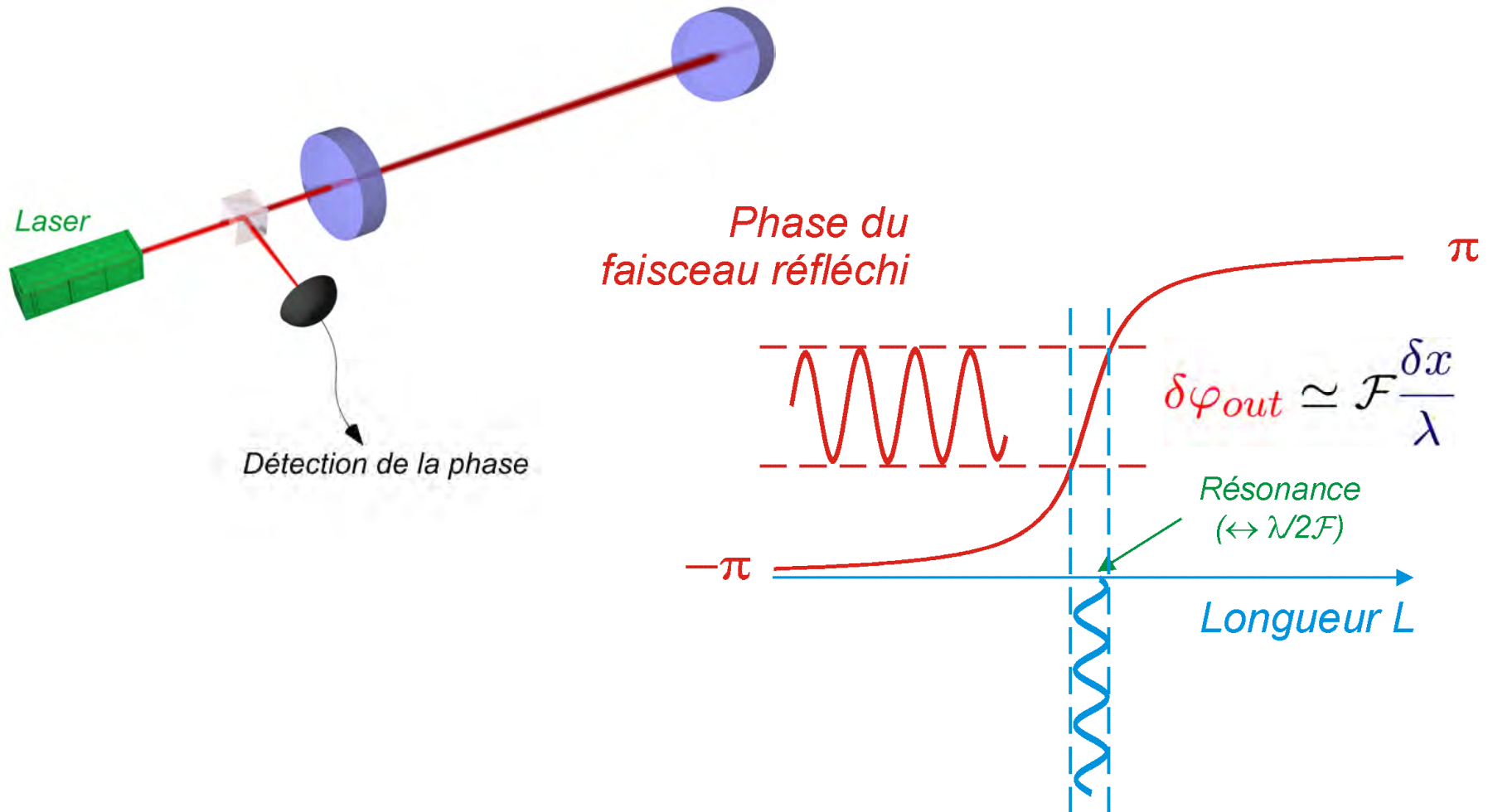
$$M \simeq 100 \mu\text{g}$$

$$Q \simeq 10\,000$$



Augmenter le signal avec un Fabry-Perot

La cavité amplifie l'effet du déplacement par le nombre d'allers-retours de la lumière



Les mesures interférométriques et les limites quantiques

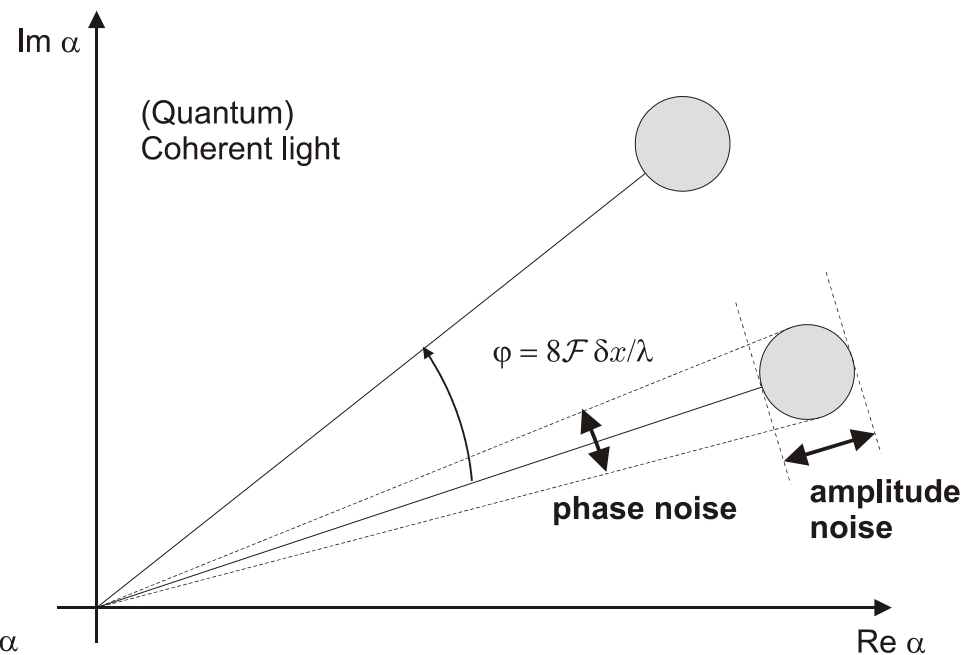
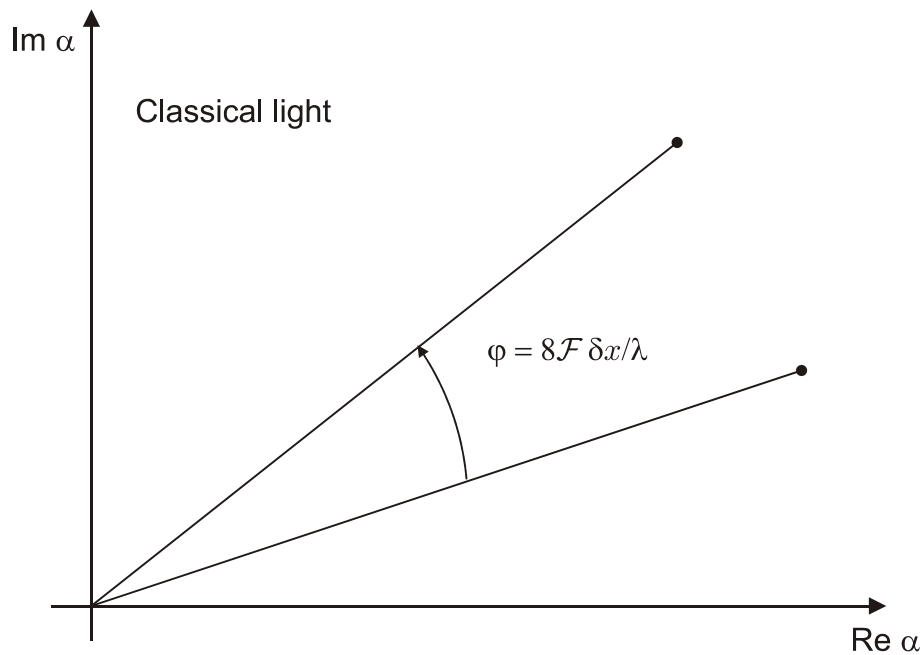
thermal noise

$$\delta\varphi_{\text{out}} = \delta\varphi_{\text{in}} + \frac{8\mathcal{F}}{\lambda} (\delta x + \delta x_{\text{cl}} + \delta x_{\text{rad}})$$

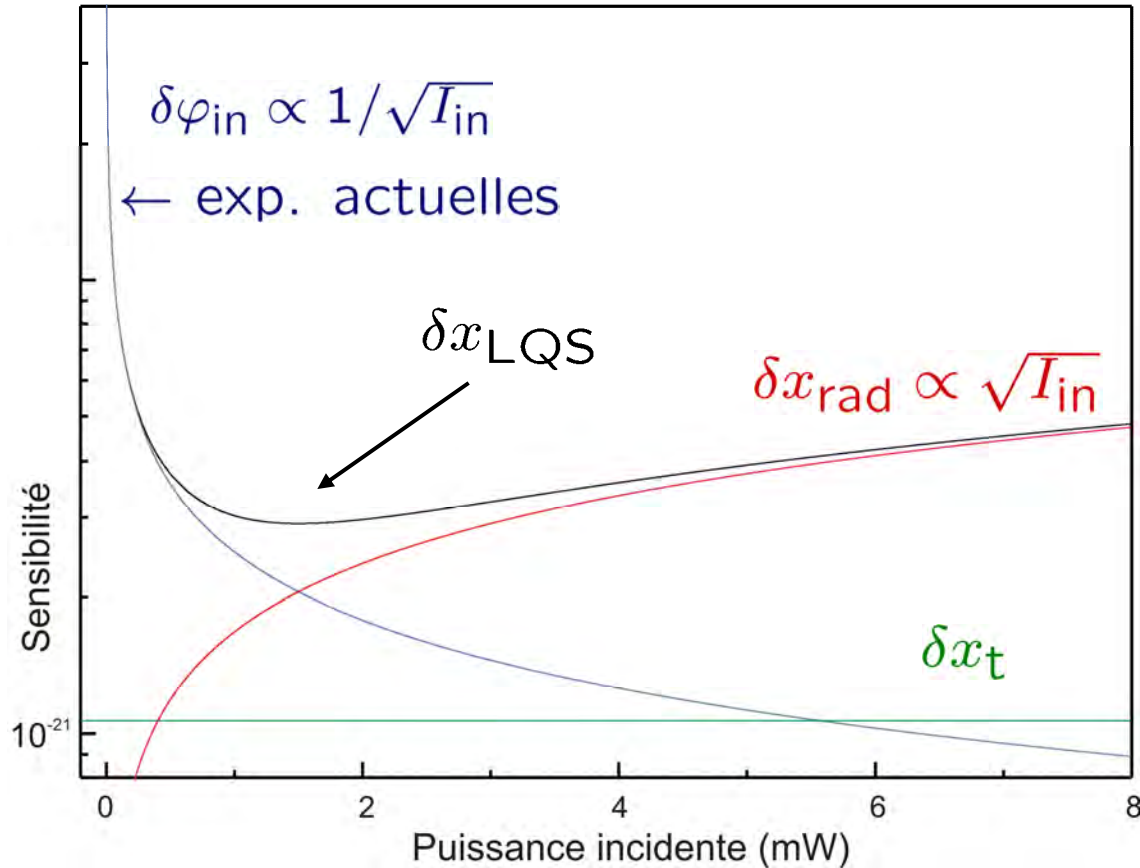
phase
noise

signal

radiation
pressure noise



La Limite Quantique Standard



Miroir en silice

$$M = 100 \mu\text{g}$$

$$\Omega_m/2\pi = 1 \text{ MHz}$$

$$Q = 10^6$$

$$T = 1 \text{ K}$$

$$\mathcal{F} = 100\,000$$

(courbe calculée
pour $\Omega \ll \Omega_m$)

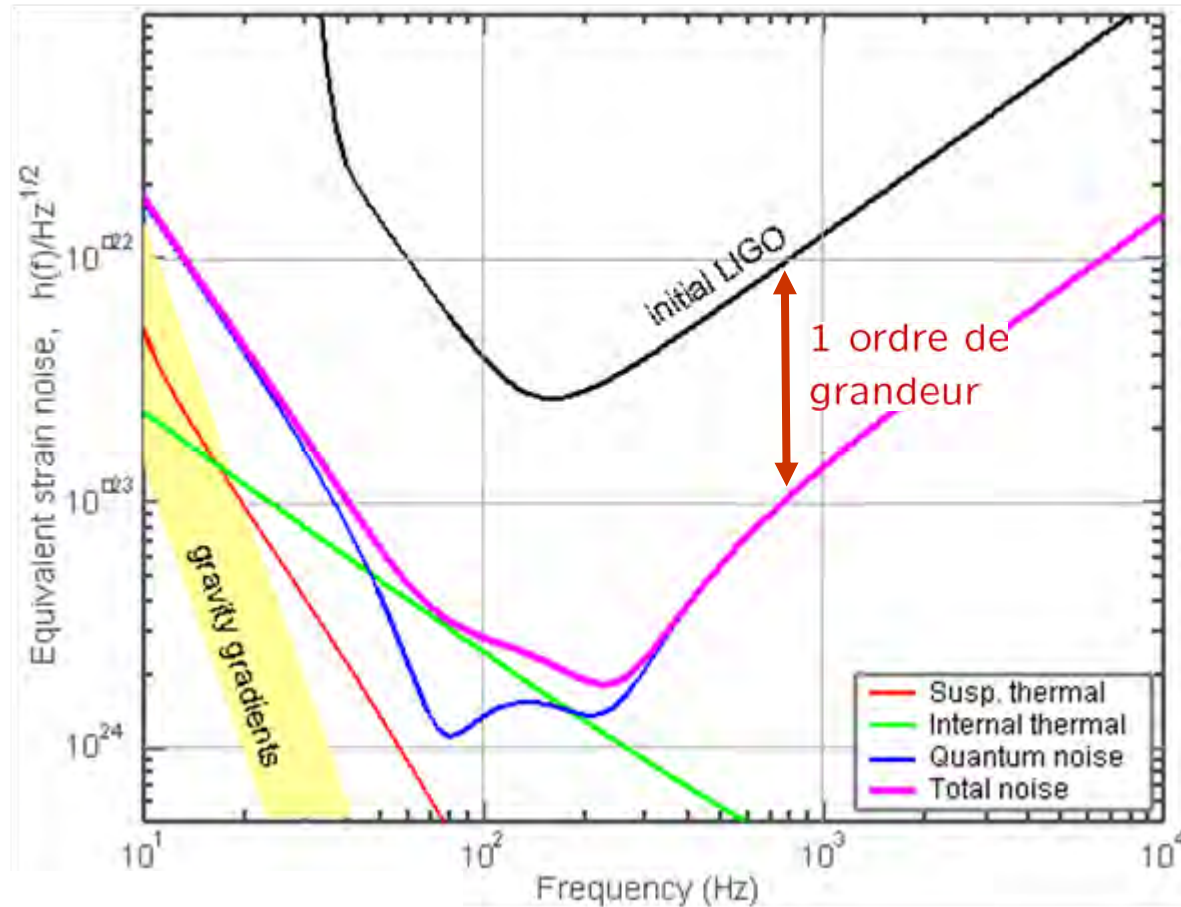
compromis (quantique) :

$$\delta x_{LQS}[\Omega] = \sqrt{\hbar\chi[\Omega]} \\ \simeq 3 \times 10^{-21} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

Des interféromètres limités par le bruit quantique

\mathcal{F} passe de 50 à 400
 P : 25 W \rightarrow 200 W
nouveaux miroirs
nouveaux coatings

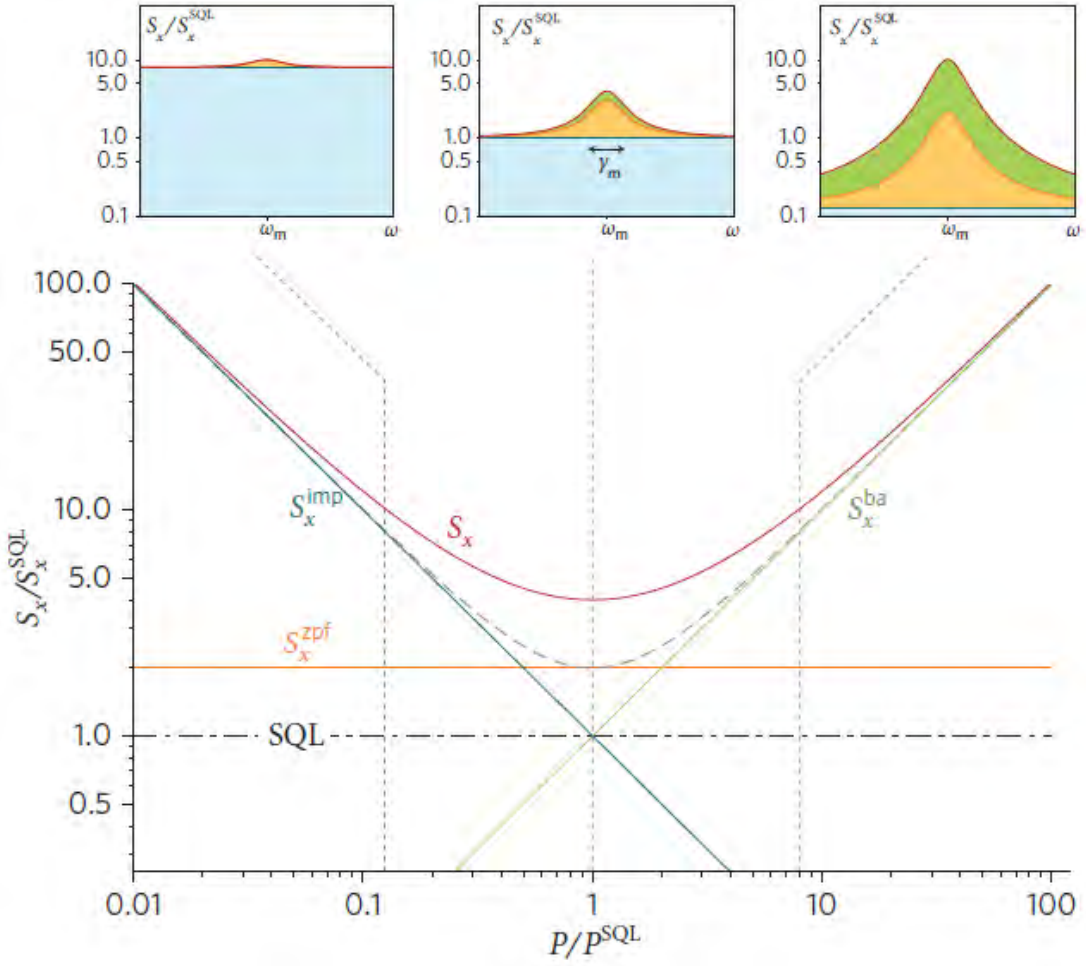
mise en service
en 2015-2016



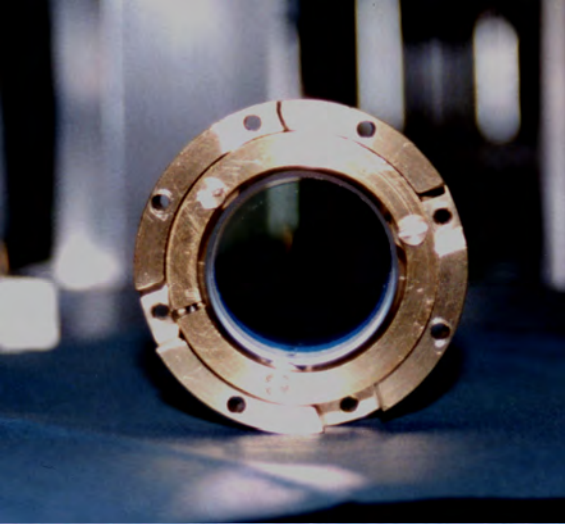
Objectif :

multiplier la sensibilité par un facteur 10
et faire passer le taux d'événements
d'un tous les 10 ans à un par semaine !

La LQS et les fluctuations quantiques de position



On peut battre la LQS !

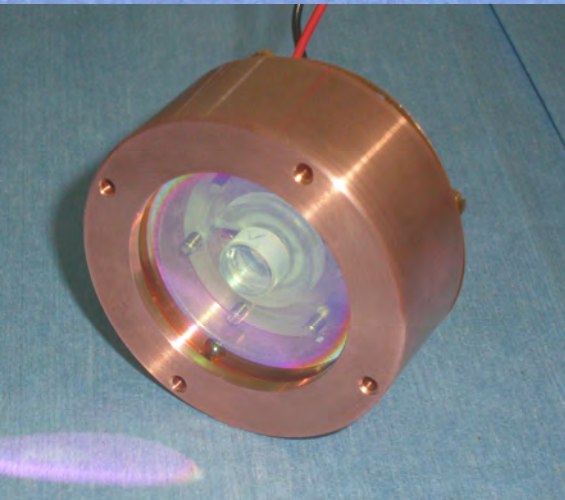


Pourquoi étudier les fluctuations
quantiques de la lumière ?



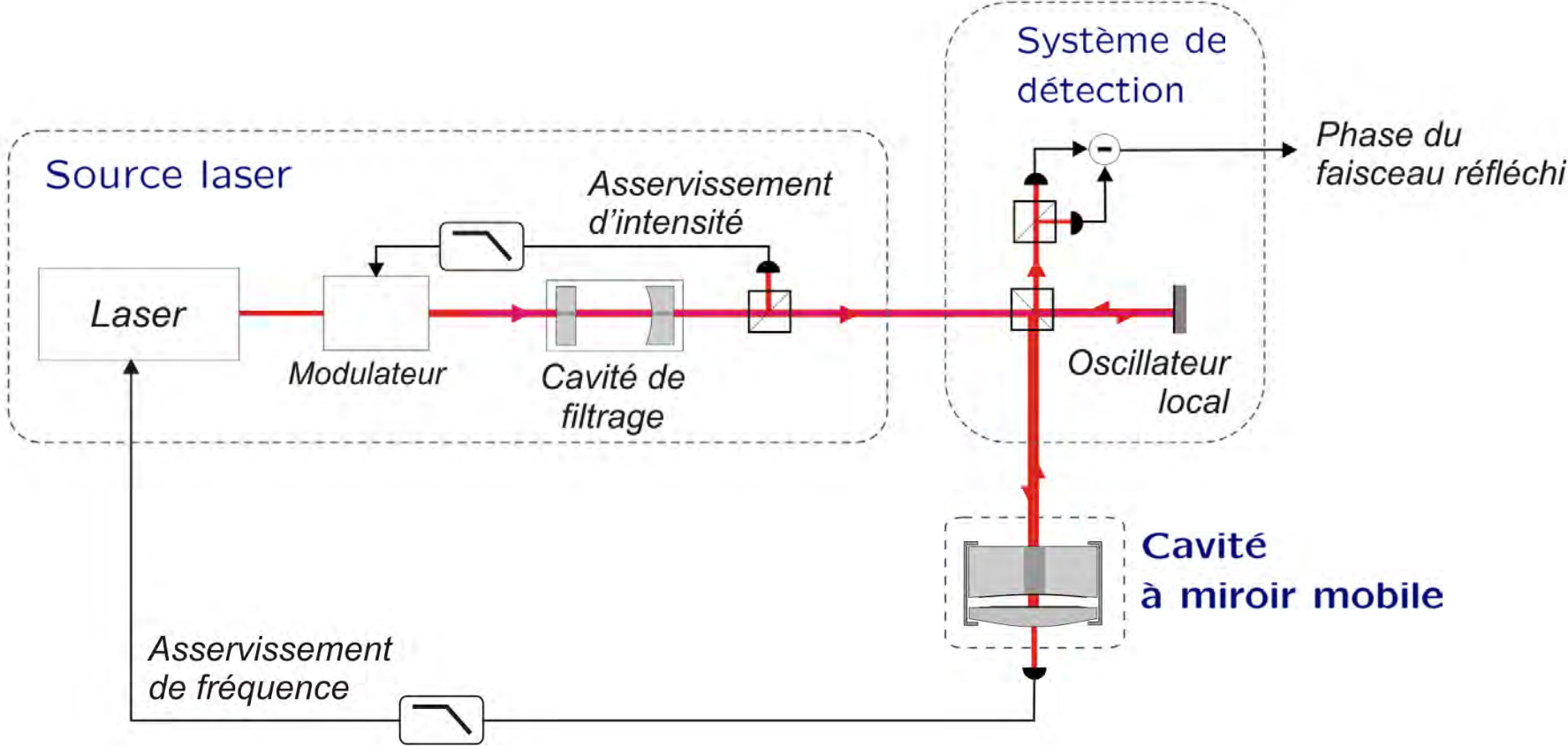
Les limites quantiques
dans les mesure de position

Réaliser une cavité avec un miroir mobile

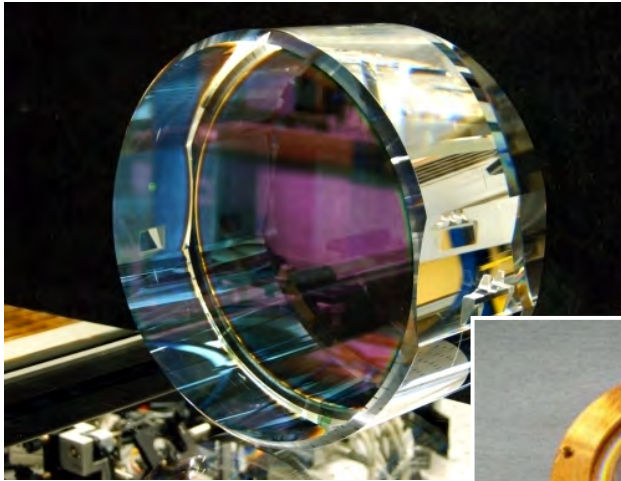


Voir le bruit quantique de pression
de radiation

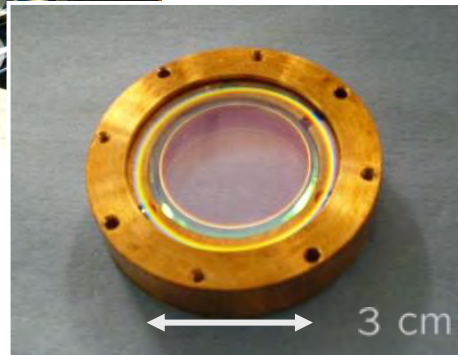
Une expérience d'optomécanique



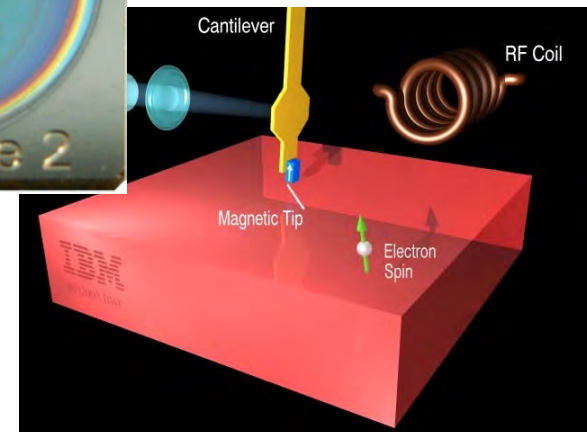
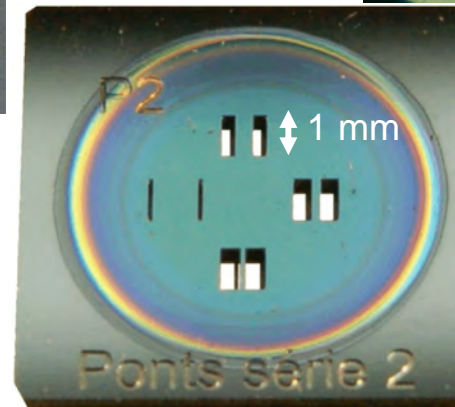
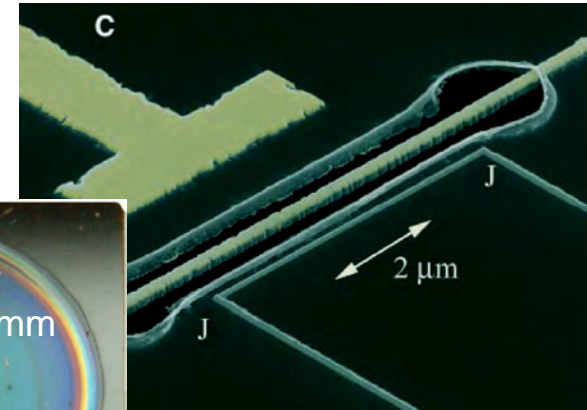
Des résonateurs optomécaniques pour voir le BQPR



Miroir d'interféromètre gravitationnel :
grande qualité optique



Schwab 2004



Microlevier d'AFM ou nanorésonateur :
grande susceptibilité mécanique

Une cavité à miroir mobile

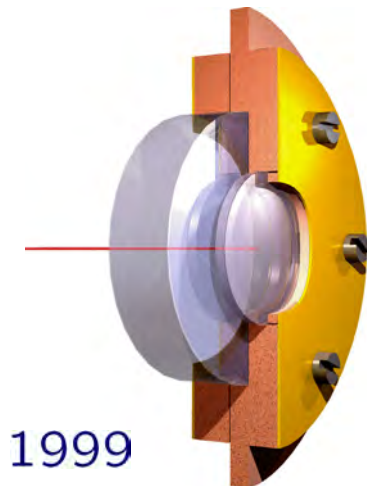
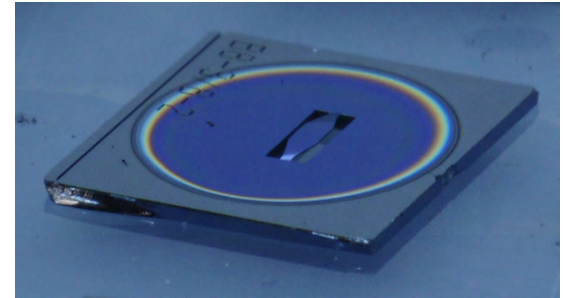
Concilier les contraintes **optiques** et **mécaniques**

pour le **miroir** :

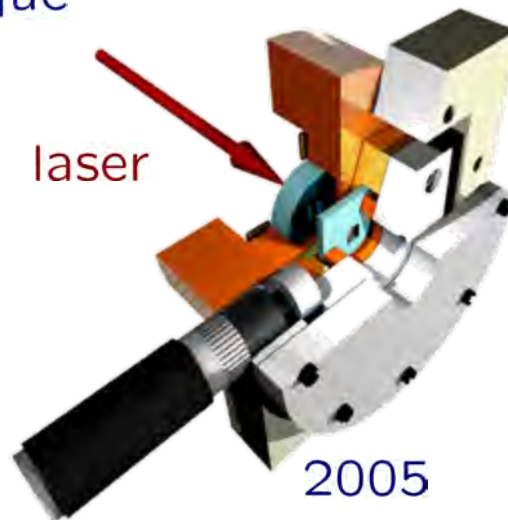
- traitement réfléchissant
- dynamique du miroir (masse, Q)
- compatibilité entre les différentes étapes

pour la **cavité** :

- stabilité mécanique
- fixation du miroir
- centrage, alignement
- compatibilité cryogénique



1999



2005

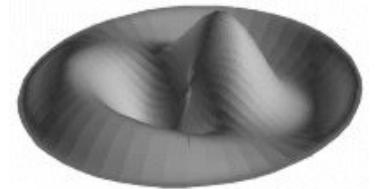
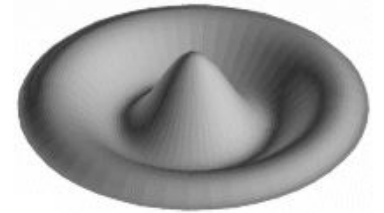
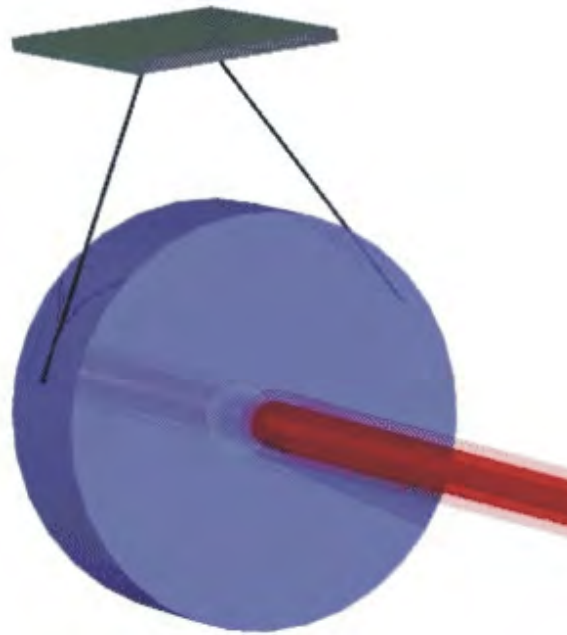


2011

Bruit de position et degrés de liberté mécaniques

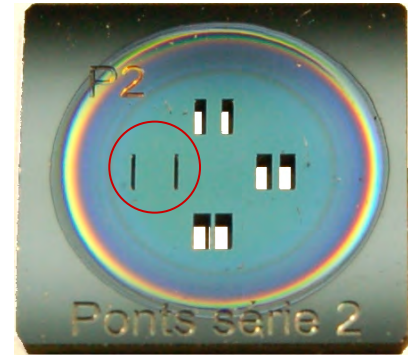
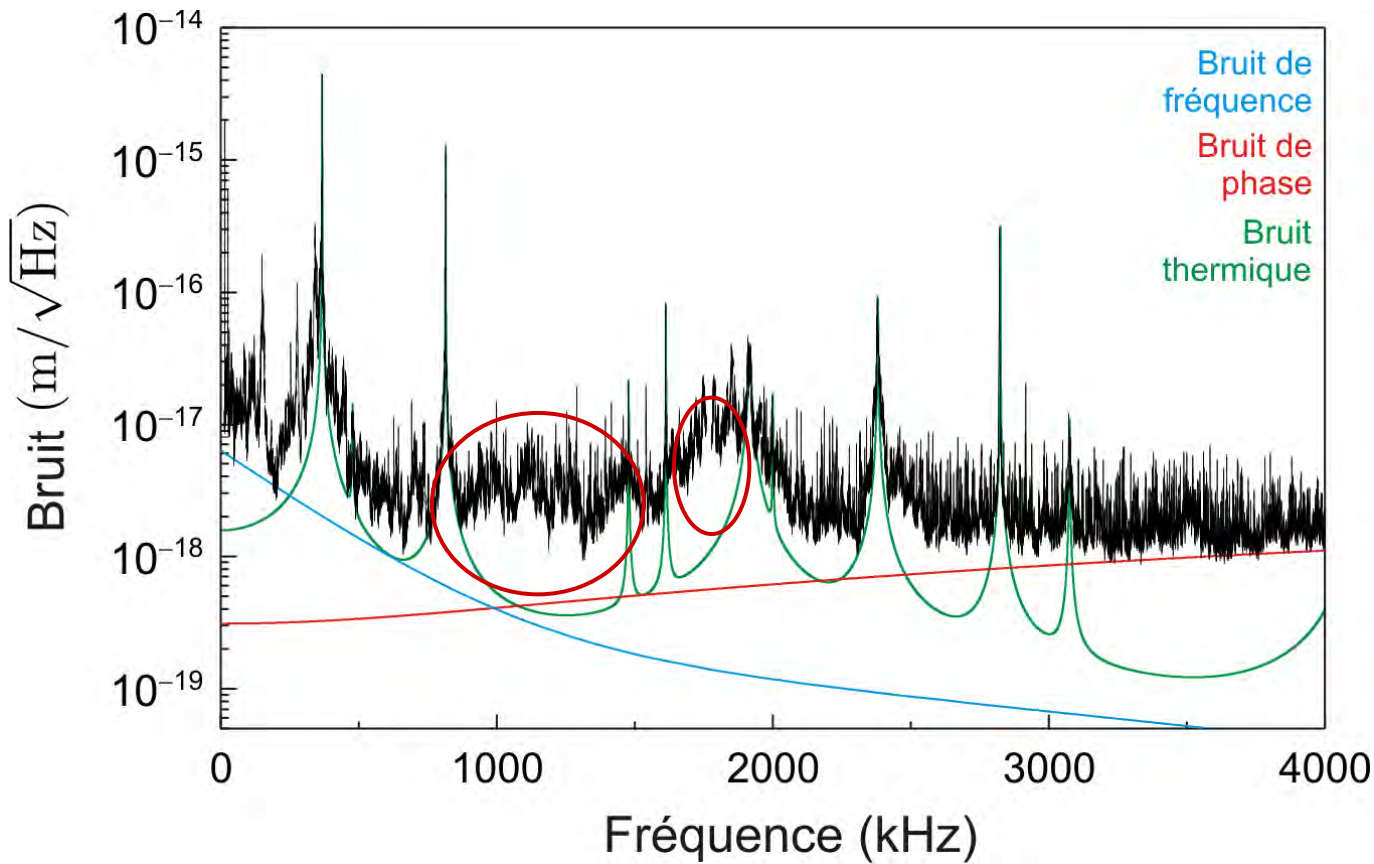
Modes violons :
harmoniques de 250 Hz

Modes de vibration internes :
qqs kHz



Mode pendulaire : $\simeq 1$ Hz

Première expérience : le spectre de bruit thermique



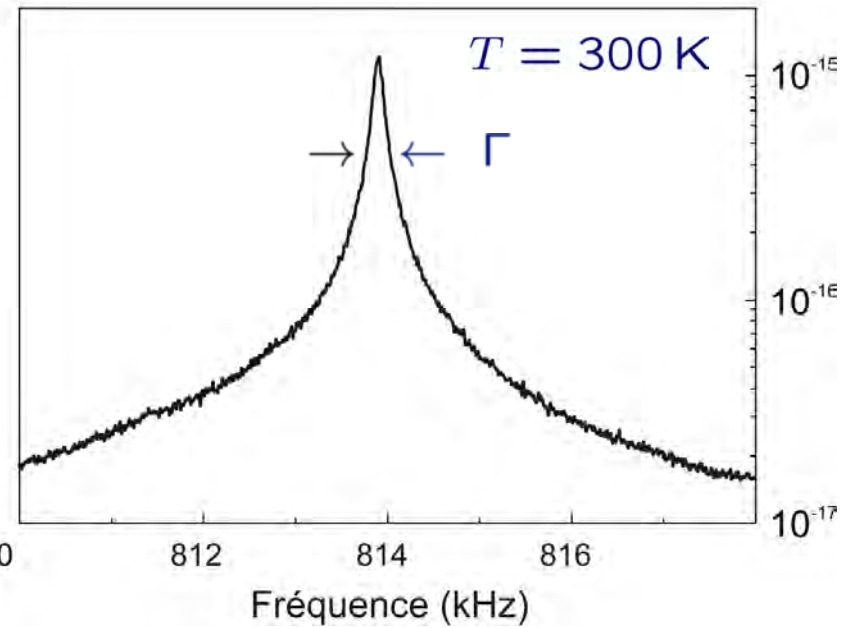
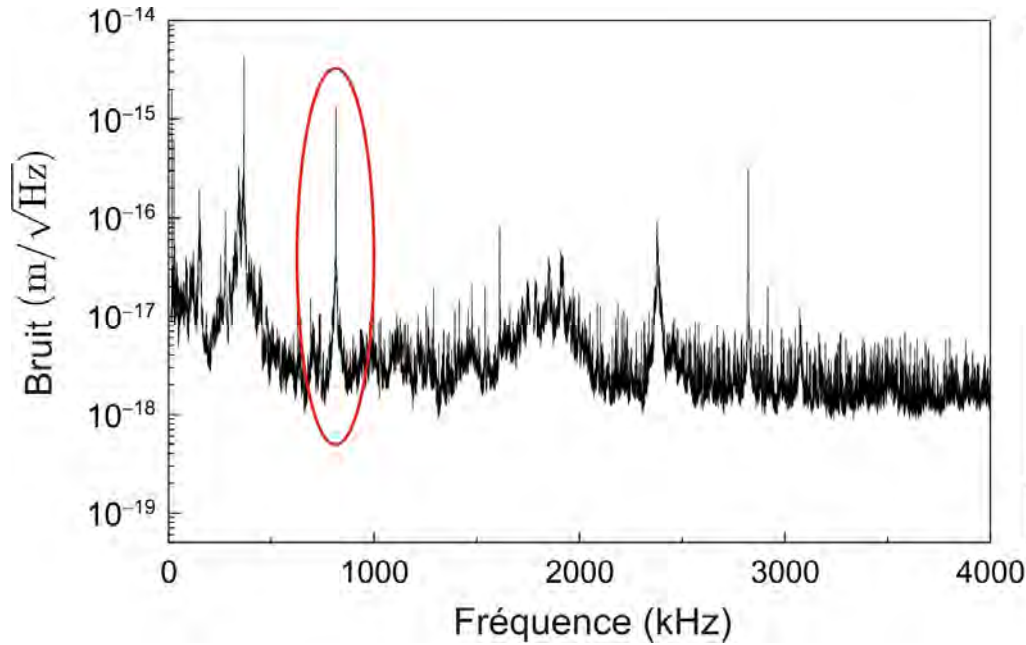
$$\mathcal{F} \simeq 30\,000$$

$$\delta x_{\min} \simeq 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

$$T = 300 \text{ K}$$



Caractérisation optomécanique d'un mode



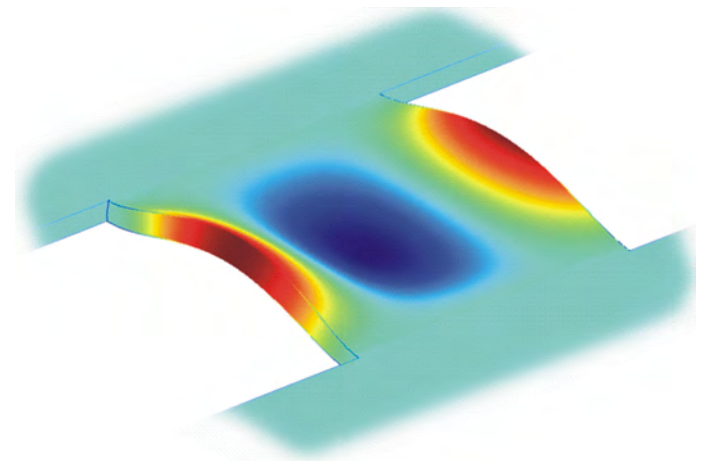
Susceptibilité mécanique :

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega^2 - \Omega_m^2 - i\Omega\Omega_m/Q)}$$

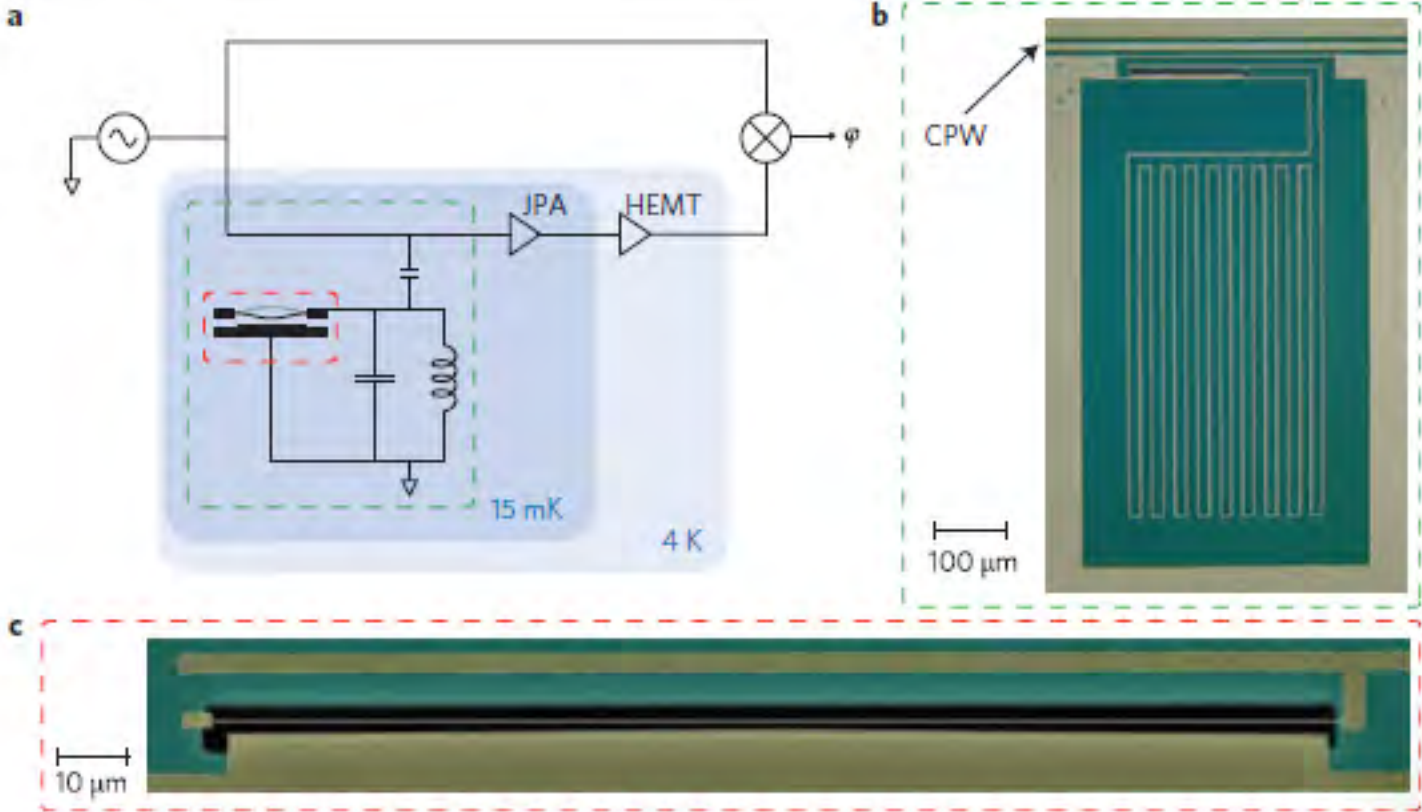
$$\Omega_m/2\pi \simeq 814 \text{ kHz}$$

$$Q = \Omega_m/\Gamma \simeq 10\,000$$

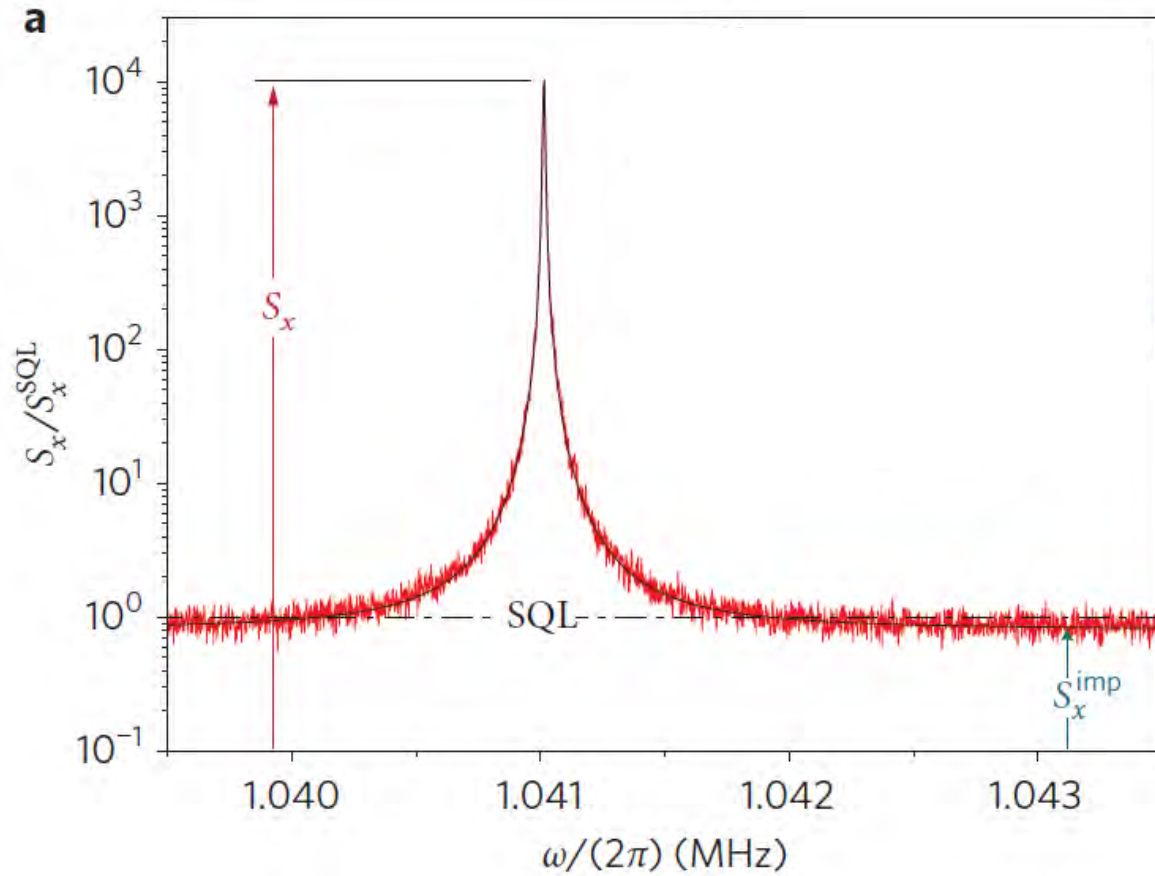
$$M = 190 \mu\text{g}$$



Réalisation dans le domaine micro-ondes

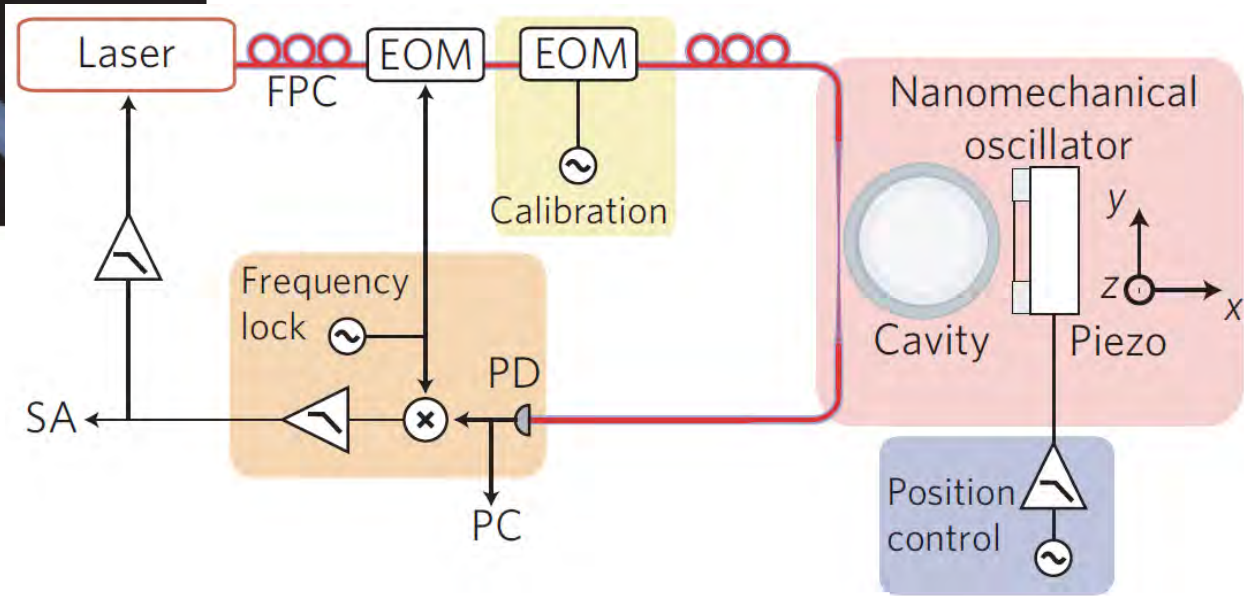
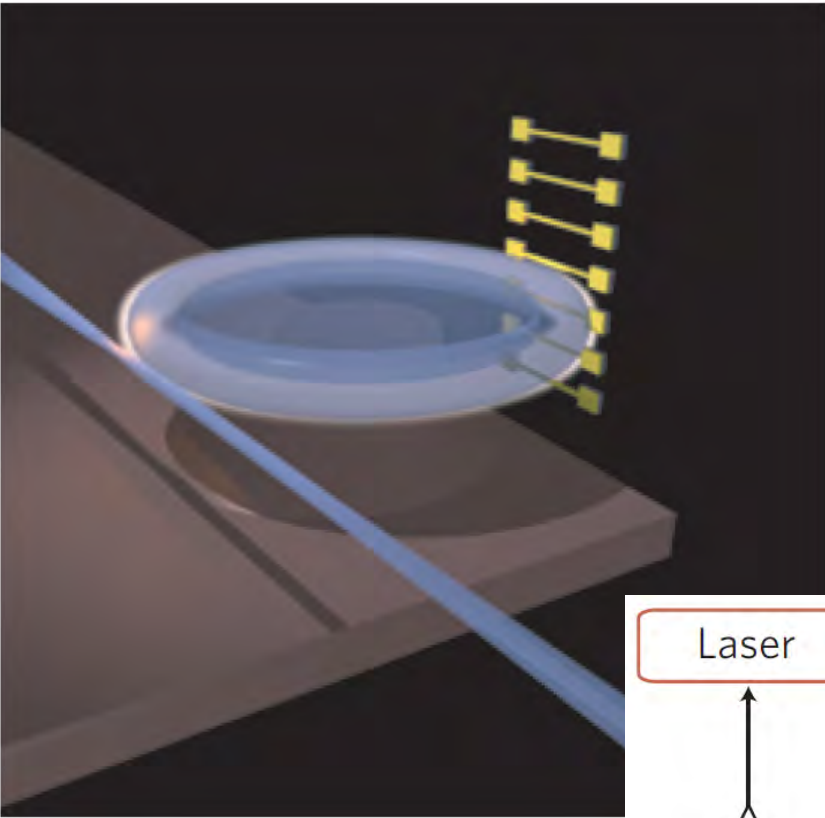


Une mesure “sub-SQL”

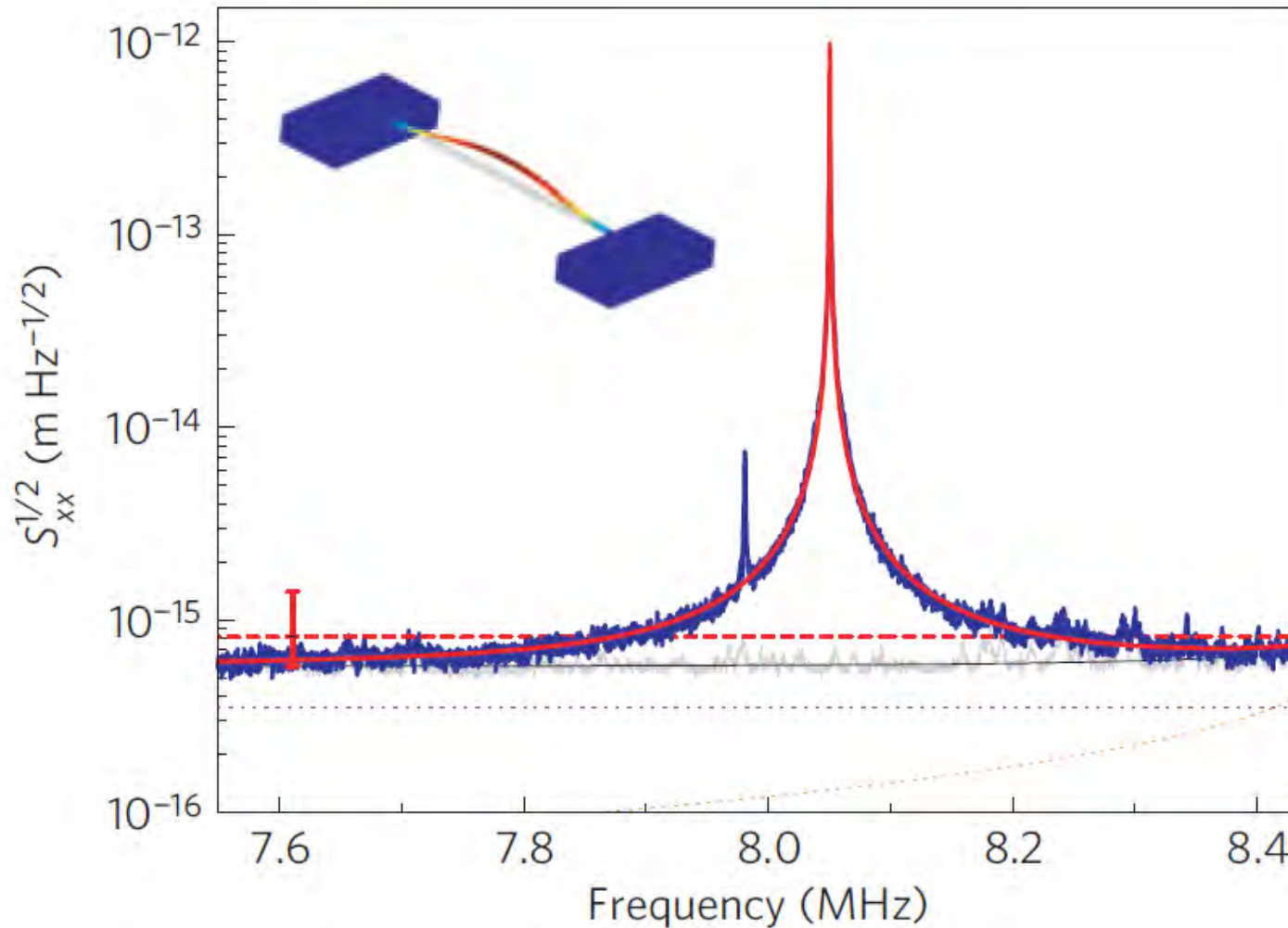


J. Teufel *et al.*
Nat. Nanotech. **4**, 820 (2009)

Les micro-tores comme senseurs universels



Une deuxième mesure “sub-SQL”...



G. Anetsberger *et al.*
Nat. Phys. **5**, 909 (2009)

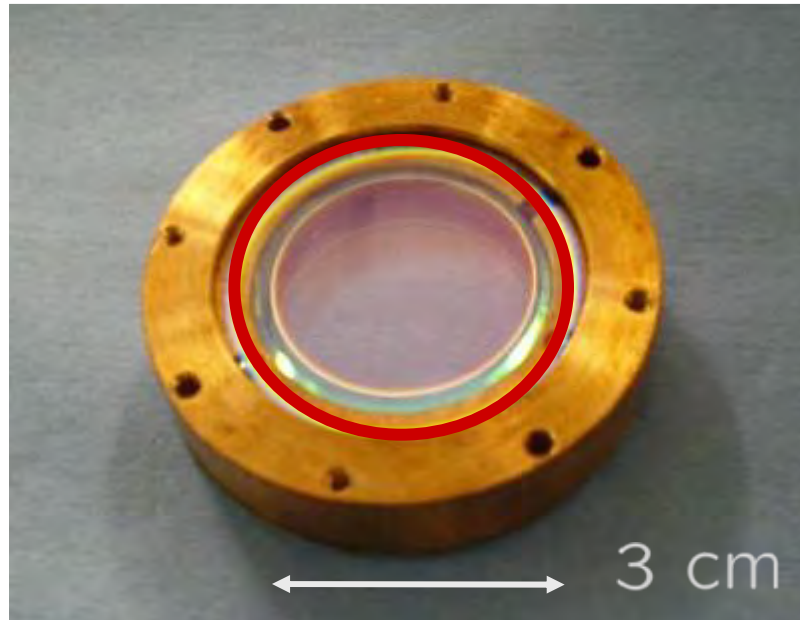
Qqs idées pour de meilleurs résonateurs

$$m \simeq 100 \text{ mg}$$

$$Q \simeq 1\,000\,000$$

$$\mathcal{F} \simeq 300\,000$$

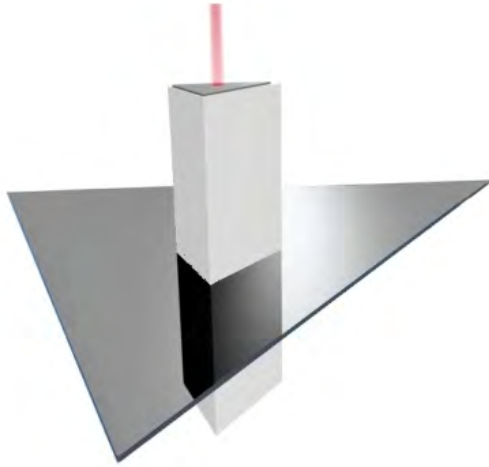
$$\Omega_m \simeq 1 \text{ MHz}$$



Clamping losses

Internal losses of the coating

An optomechanical micropillar



Clamping to a vibration node

→ no clamping loss

No strain at the coating location

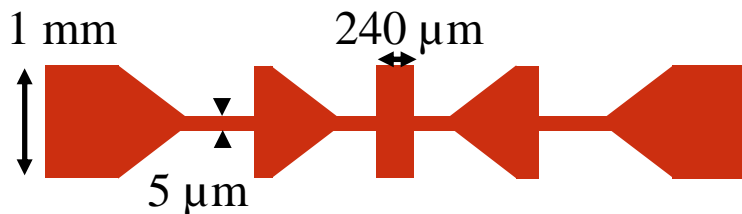
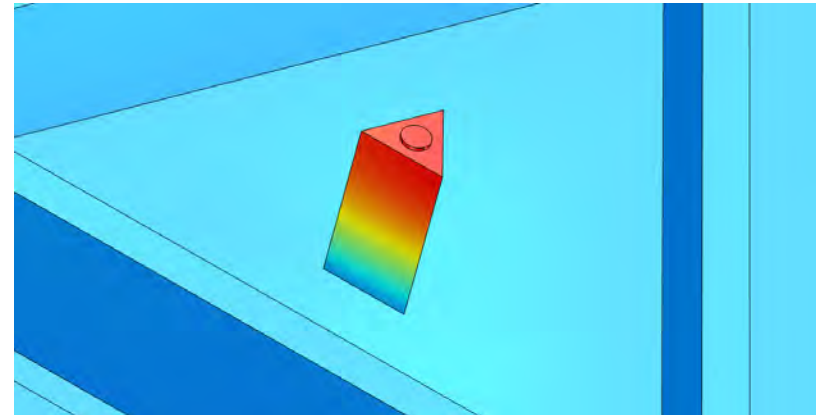
→ no coating losses

1-mm long quartz micropillar

$M \simeq 100 \mu\text{g}$

$\Omega_m/2\pi \simeq 3,6 \text{ MHz}$

$Q \simeq 10^6 \text{ to } 10^8$



Micro-fabrication

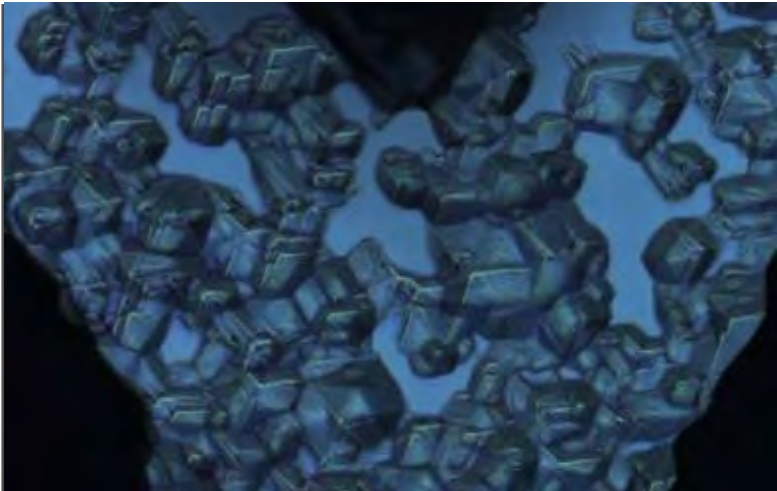
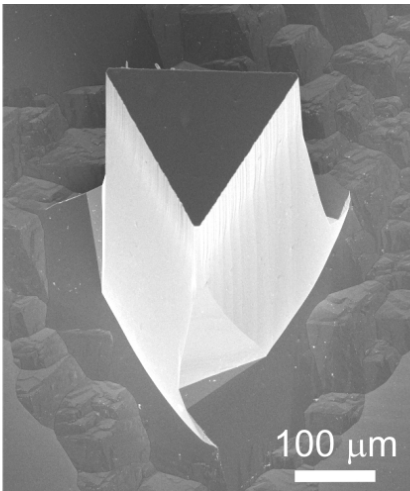
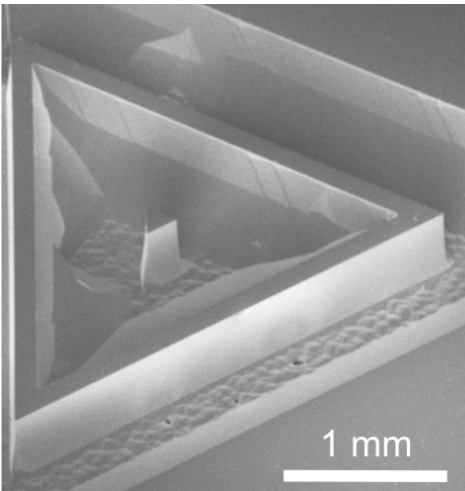
$Q \simeq 10\ 000$

$Q \simeq 1\ 000\ 000$

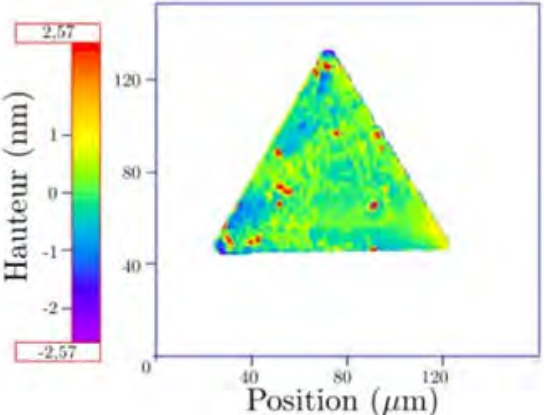


$Q \simeq 100\ 000$

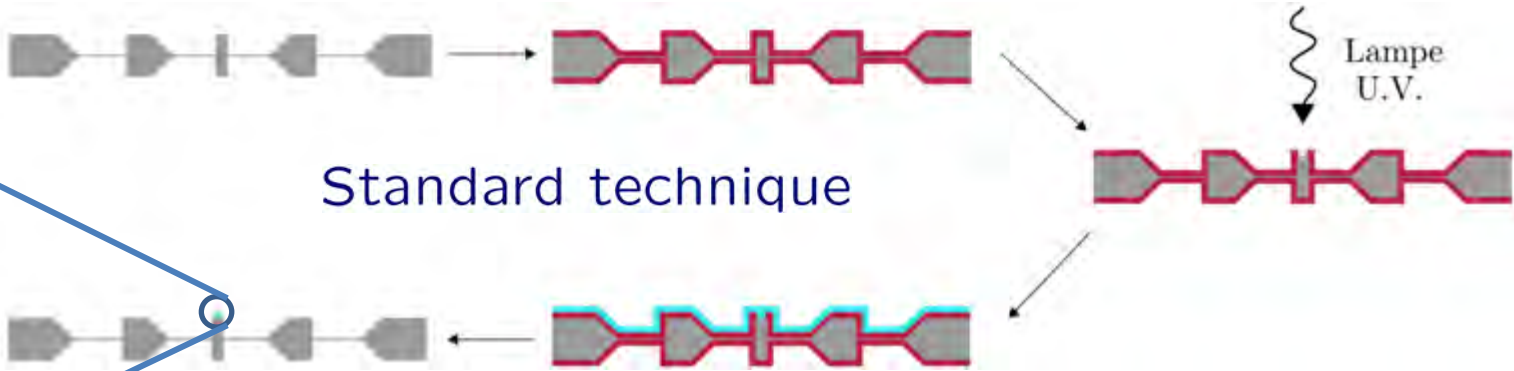
Membrane



Optical coating



**Super polishing
of the surface (5 Å rms)**



Standard technique

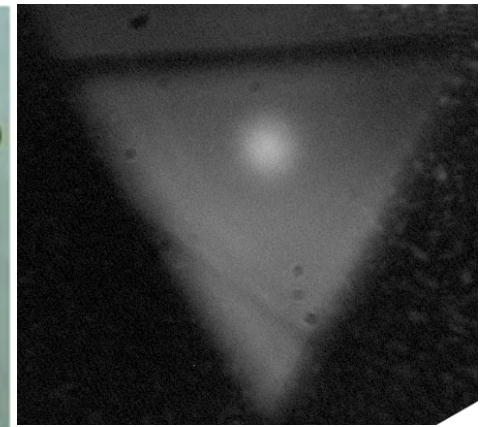


70 μm

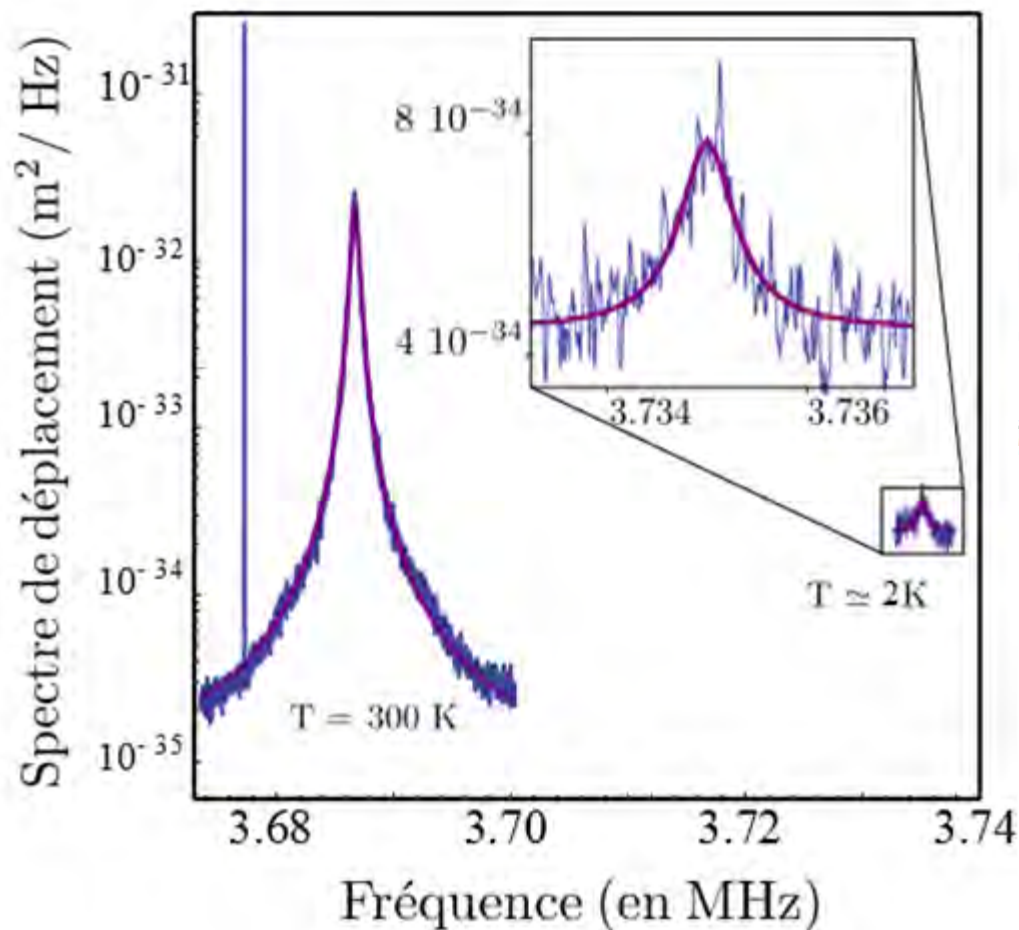
Polymer film mask,
resistant to coating conditions



Mode-matching inside a dilution fridge



Thermal noise spectra at room and low T



$$\mathcal{F} = 40\,000$$

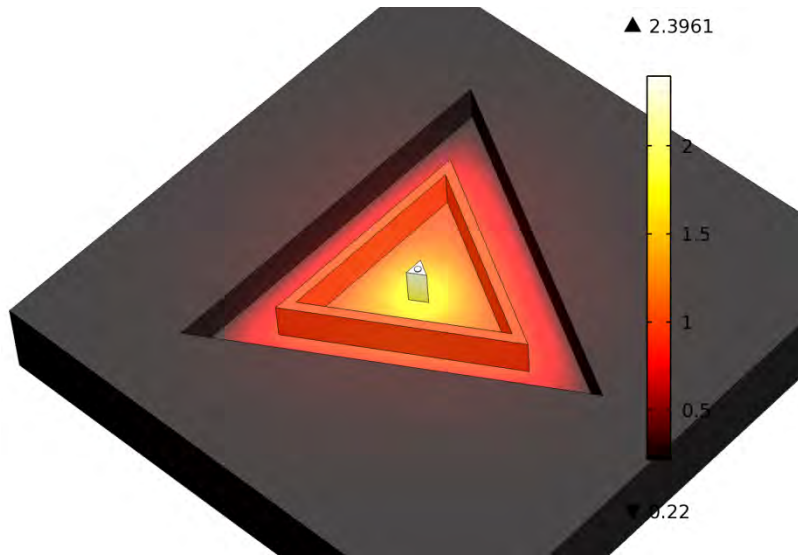
$$Q = 4\,000$$

$$T_{\text{cryo}} = 200 \text{ mK}$$

$$P_{\text{in}} = 40 \mu\text{W} \rightarrow 1 \text{ mW}$$

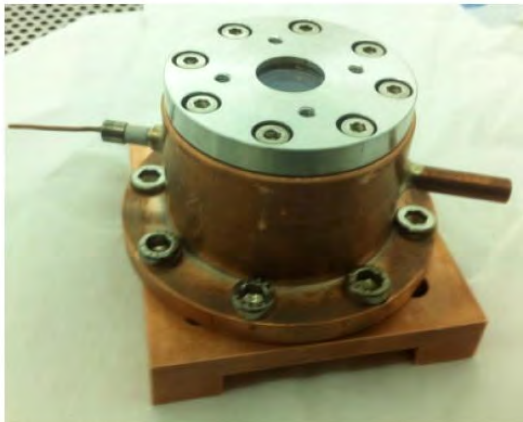
$$T_{\text{mode}} = 1 \text{ K} \rightarrow 6 \text{ K}$$

Thermalization issues

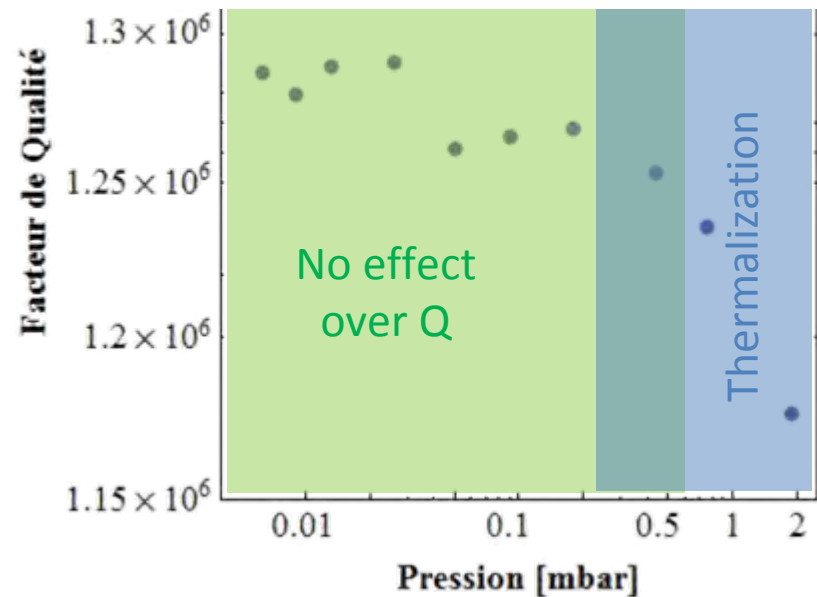


Weak thermal link
between pillar and cold plate:
200 mK \rightarrow 2 K (or more!)

Buffer gas chamber



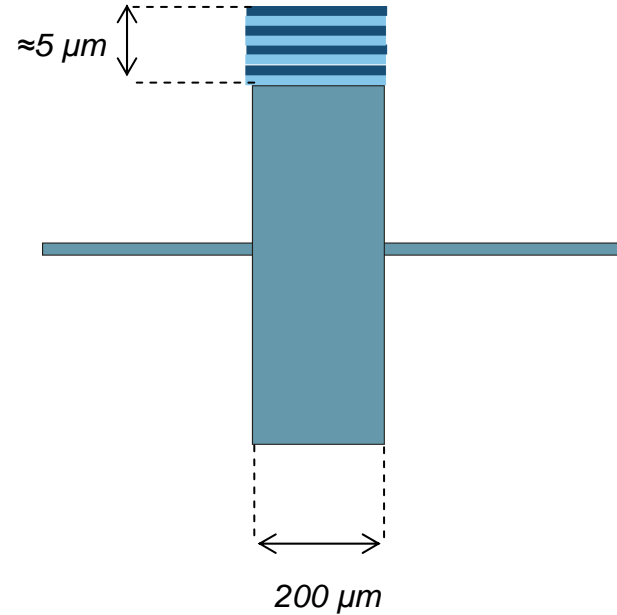
First tests



Why not get rid of the coating?

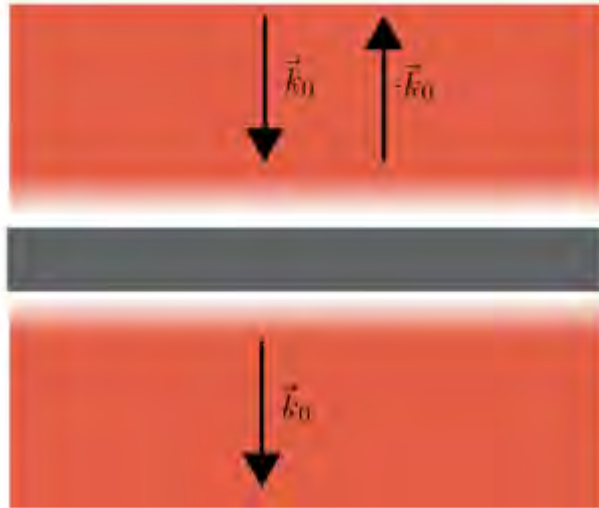
Dielectric coatings:

- set a lower limit to resonator mass
- have poor mechanical Q s



A photonic-crystal to boost reflectivity

Single layer Fabry-Perot : $R \sim 66\%$

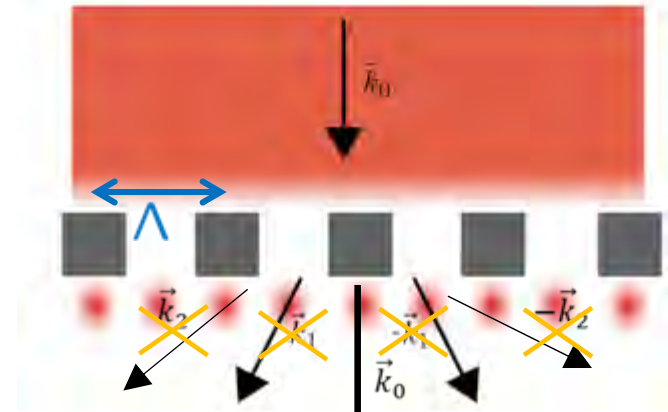


$$n_{\text{air}} = 1$$

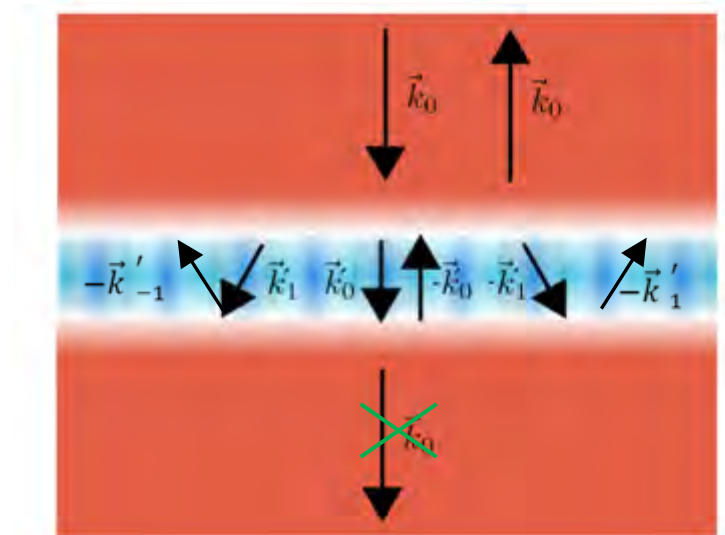
$$n_{\text{InP}} \simeq 3$$



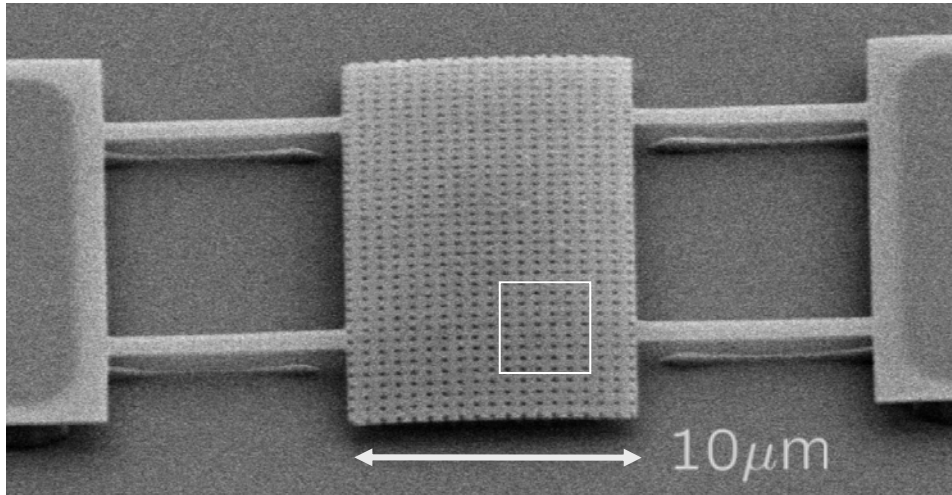
Photonic crystal



$$\text{Diffracted order } p: k_p^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2p\pi}{\Lambda}\right)^2$$

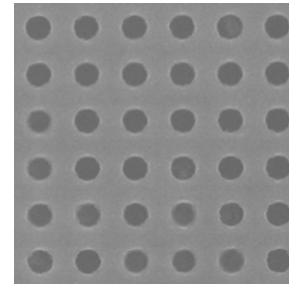


A photonic-crystal membrane



InP membrane

$20\mu\text{m} \times 10\mu\text{m} \times 200\text{nm}$



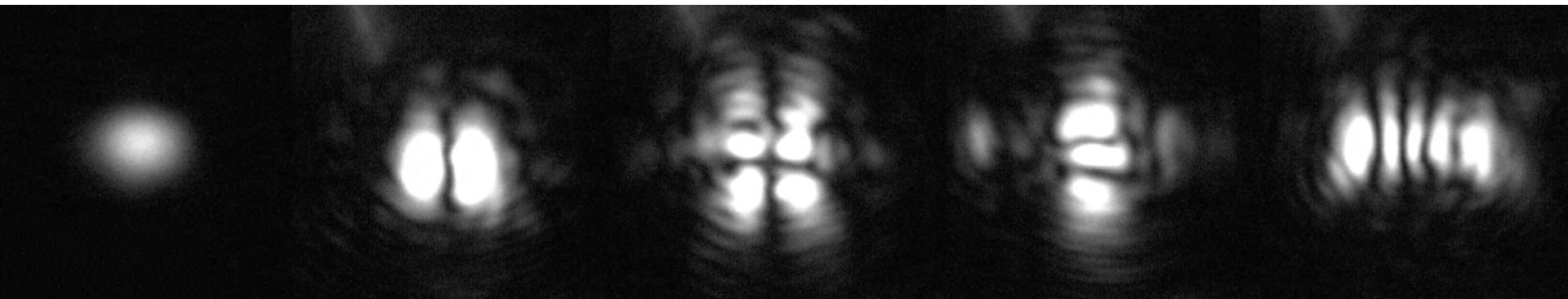
$\approx 725\text{nm}$

Photonic crystal:

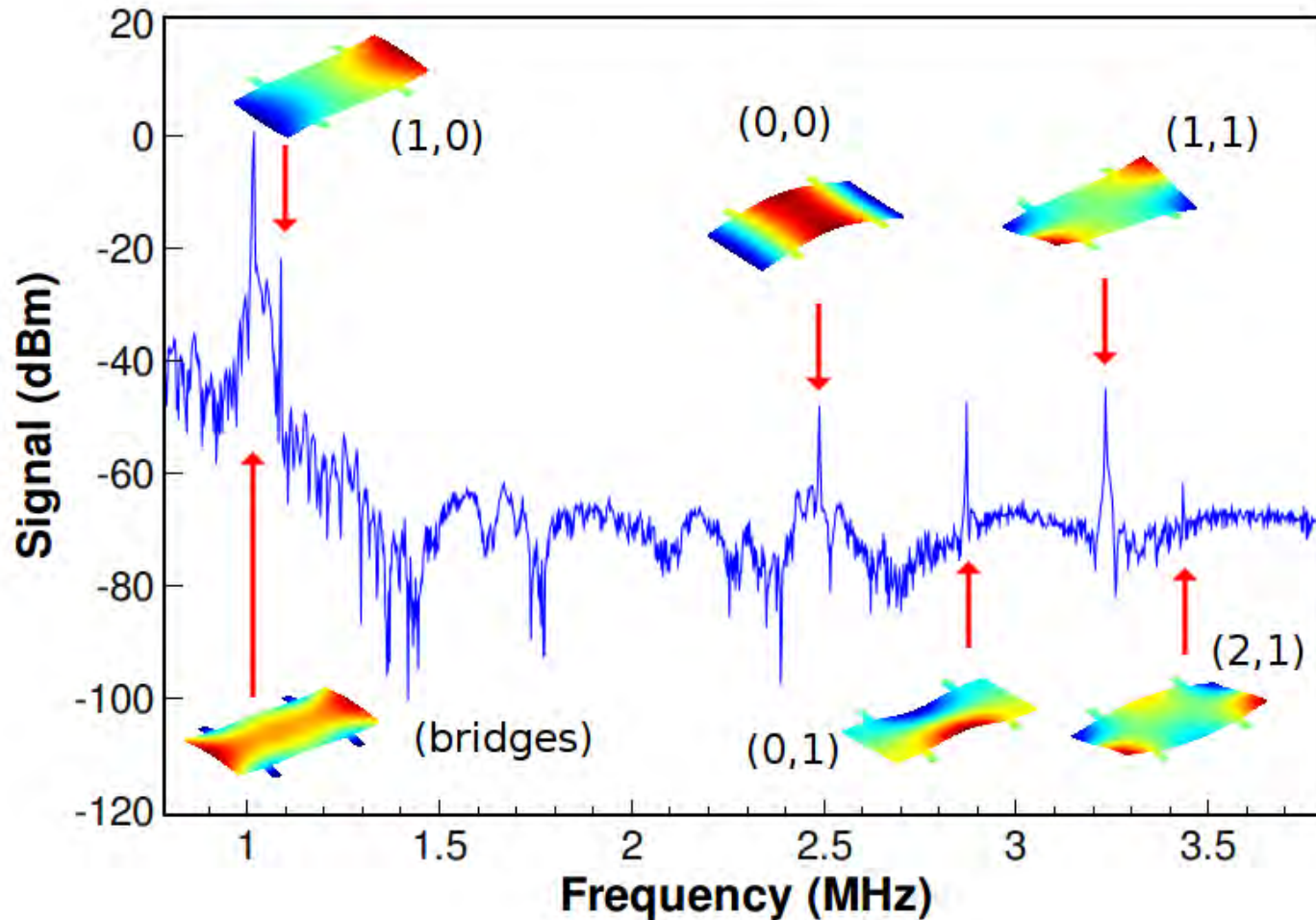
$R \approx 95\%$

Opt. Lett. (2011)

Cavity: $w_0 \approx 2 - 3\mu\text{m}$ $\mathcal{F} \approx 100$



Mechanical modes of the membrane



$M \simeq 100 \text{ pg}$
 $\Omega_m/2\pi \simeq \text{MHz}$
 $Q \text{ up to } 10^5$
Opt. Lett. (2011)